Ağırlık - kütle merkezi hesaplamaları

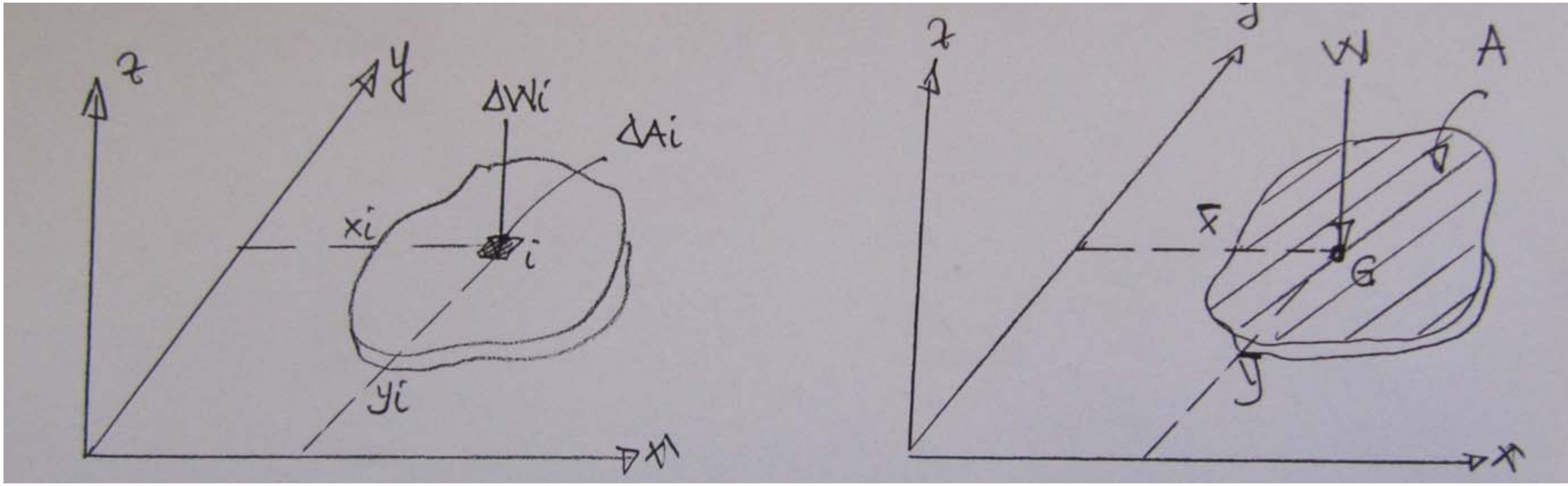
<u>Konular:</u>

Kütle/Ağırlık merkezleri

Merkez kavramı

Merkez hesabına yönelik yöntemler

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları



Düzlem alan üzerindeki sonsuz adet elemandan biri olan i'inci elemanın ağırlık merkezinin koordinatları:

Düzlem alanın ağırlık merkezinin koordinatları:

ΔW_i : i. elemanın ağırlığı

ΔA_i : i. elemanın alanı

(x_i, y_i): i. elemanın ağırlık merkezinin koordinatları

W : Düzlemsel alanın ağırlığı

A : Düzlemin alanı

$(\bar{x}, \bar{y})$: Düzlemin alanın ağırlık merkezinin koordinatları

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

- Düzlem alan; sonsuz adet i elemandan meydana geldiği için; düzlemsel alana etkiyen toplam yerçekim kuvveti (ağırlık):

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_n = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i} \quad \text{olur.}$$

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

- Ağırlık merkezinin koordinatları olan $(\bar{x}, \bar{y})$'nin hesaplanabilmesi için, toplam kuvvetlerin; x ve y eksenleri etrafında yaratacağı statik momentlerin, bütünü oluşturan her bir eleman kuvvetinin teker teker bu eksenlere göre alınan statik momentlerin toplamına eşit olacağı ilkesinden faydalanılır:

$$\bar{x}.W = x_1.\Delta W_1 + x_2.\Delta W_2 + x_3.\Delta W_3 + ... + x_n.\Delta Wn$$

$$\bar{x}.\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.\,\Delta W_i$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i.\,\Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i}}$$

olur.

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

- Ağırlık merkezinin koordinatları olan $(\bar{x}, \bar{y})$'nin hesaplanabilmesi için, toplam kuvvetlerin; x ve y eksenleri etrafında yaratacağı statik momentlerin, bütünü oluşturan her bir eleman kuvvetinin teker teker bu eksenlere göre alınan statik momentlerin toplamına eşit olacağı ilkesinden faydalanılır:

$$\bar{y}.W = y_1.\Delta W_1 + y_2.\Delta W_2 + y_3.\Delta W_3 + ... + y_n.\Delta Wn$$

$$\bar{y}.\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} y_i . \Delta W_i$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i . \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i}}$$

olur.

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

t; düzlemsel alanın sabit kalınlığı ve γ; düzlemsel alanın imal edildiği malzemenin birim hacim ağırlığı olmak üzere;

W =Hacim x Birim hacim ağırlık

W = (**A** x ***t***)x γ olur.

Benzer şekilde i. elemanın ağırlığı;

Δ***W**$_i$*= (**A$_i$** x ***t***)x γ olur.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \,.\, \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i}$$

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i . A_i . \cancel{t} . \cancel{\gamma})}{\sum_{i=1}^{n} (A_i . \cancel{t} . \cancel{\gamma})} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i . A_i)}{\sum_{i=1}^{n} (A_i)}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i . A_i . \cancel{t} . \cancel{\gamma})}{\sum_{i=1}^{n} (A_i . \cancel{t} . \cancel{\gamma})} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i . A_i)}{\sum_{i=1}^{n} (A_i)}}$$

Ele alınan düzlemsel alan; basit geometrik şekillere ayrılabiliyorsa yukarıdaki bağıntılar geçerlidir.

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

Ele alınan düzlemsel alan; basit geometrik şekillere ayrılamıyorsa; yukarıdaki bağıntılar aşağıdaki gibi; sürekli ortam, diğer bir deyişle <u>integral ifadesine dönüştürülmelidir</u>.

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i . A_i)}{\sum_{i=1}^{n} (A_i)} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A x.dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A}$$

$$\bar{y} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i . A_i)}{\sum_{i=1}^{n} (A_i)} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int_A y.dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}$$

Burada; A: Düzlemsel yüzeyin toplam alanını

S_y: y eksenine göre "statik momenti" (birimi m^3, cm^3…)

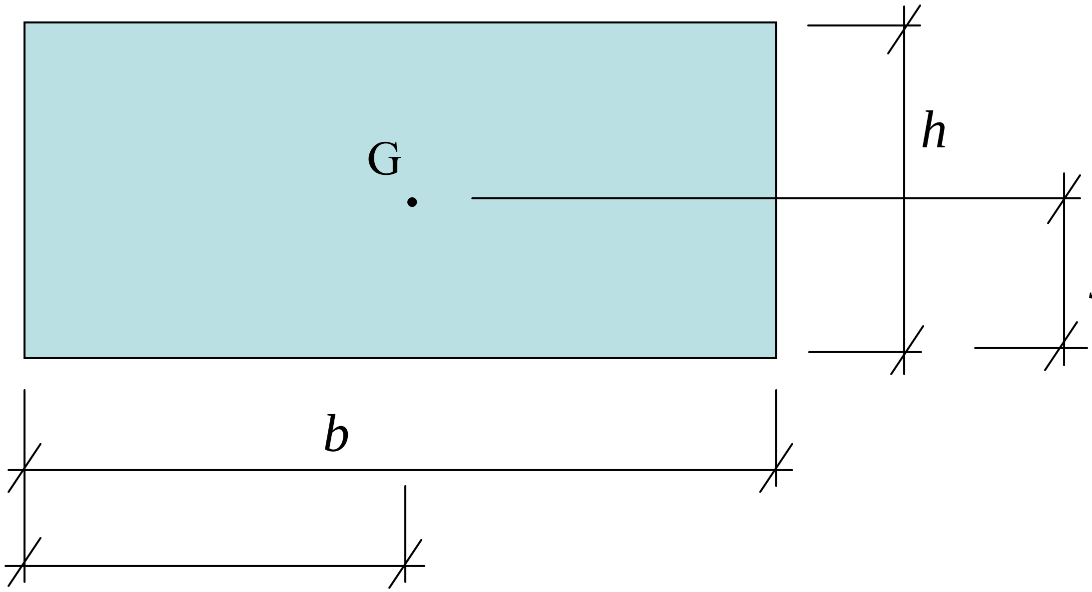
S_x: x eksenine göre "statik momenti" (birimi m^3, cm^3…) göstermektedir.

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

Basit geometrik şekillerin ağırlık merkezleri

DİKDÖRTGEN
(b=h İSE KARE)

$$A = b.h$$



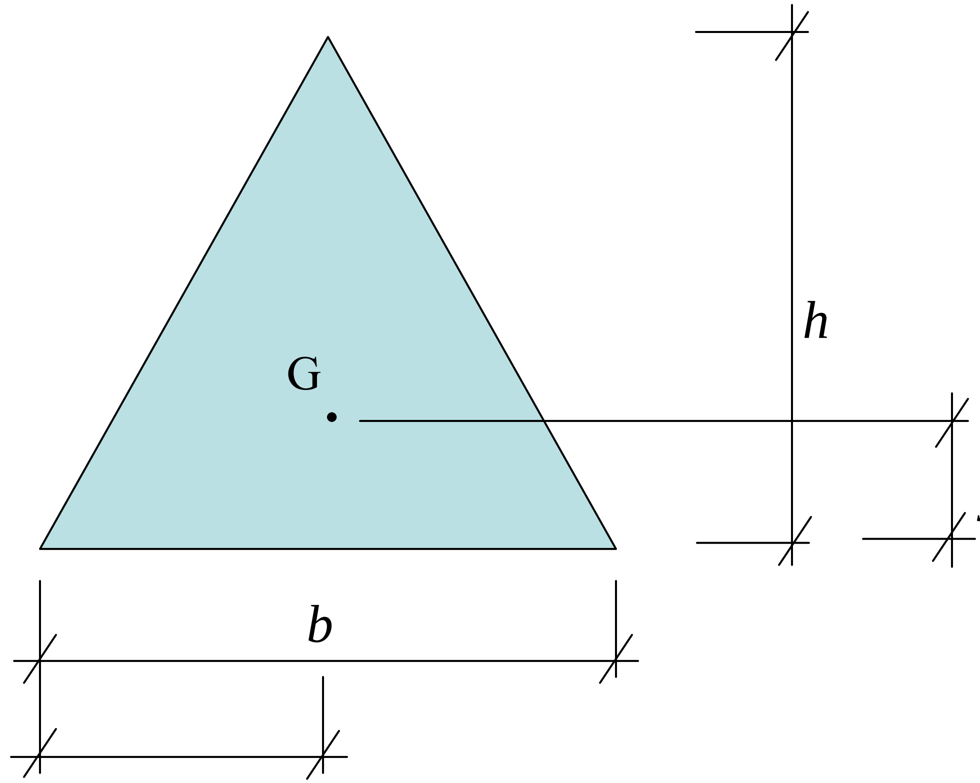
$$\bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{b}{2}$$

Basit geometrik şekillerin ağırlık merkezleri

EŞKENAR VE İKİZKENAR ÜÇGEN

$$A = \frac{b.h}{2}$$



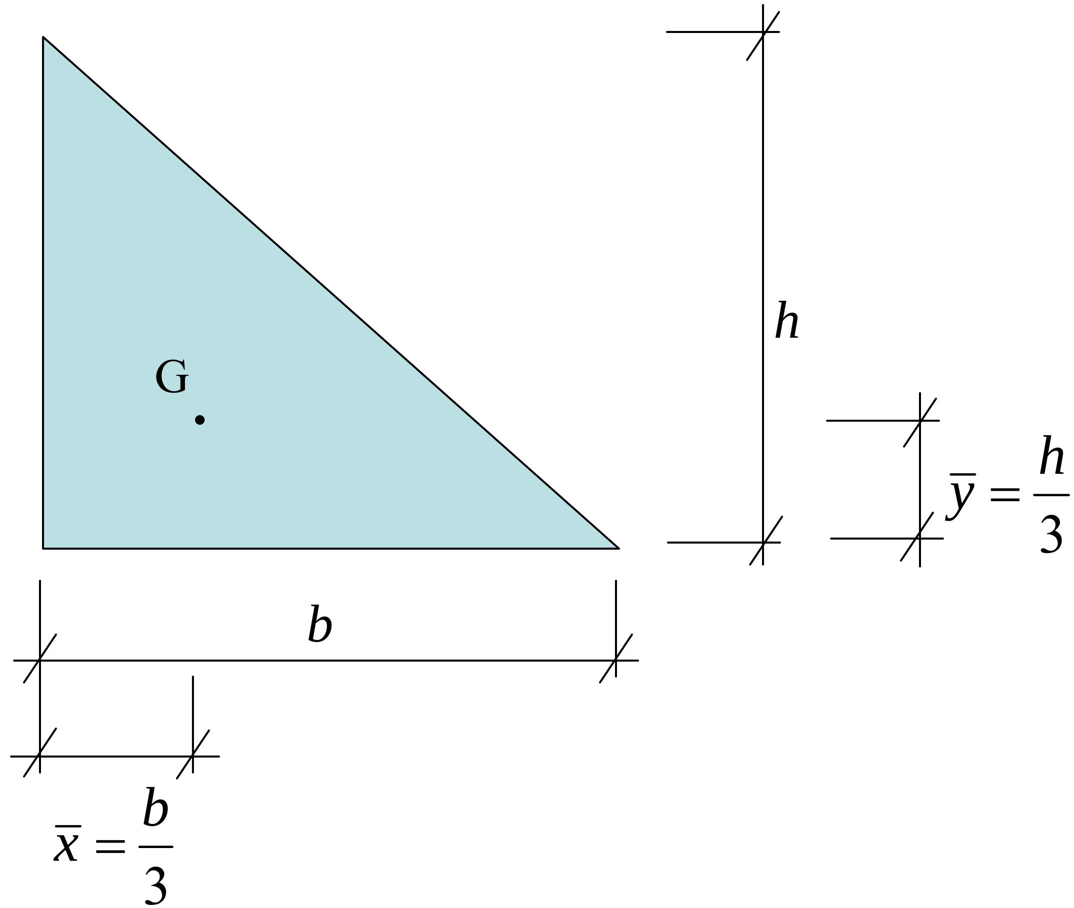
$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{b}{2}$$

Basit geometrik şekillerin ağırlık merkezleri

DİK ÜÇGEN

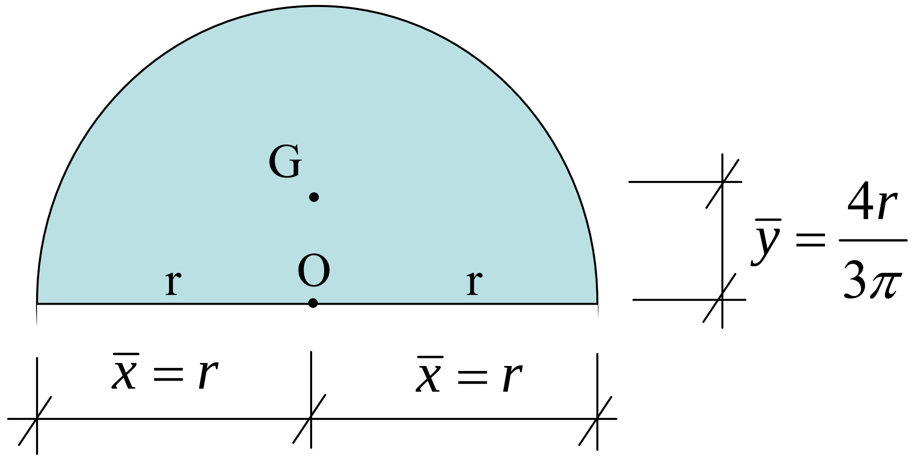
$$A = \frac{b.h}{2}$$



Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

Basit geometrik şekillerin ağırlık merkezleri

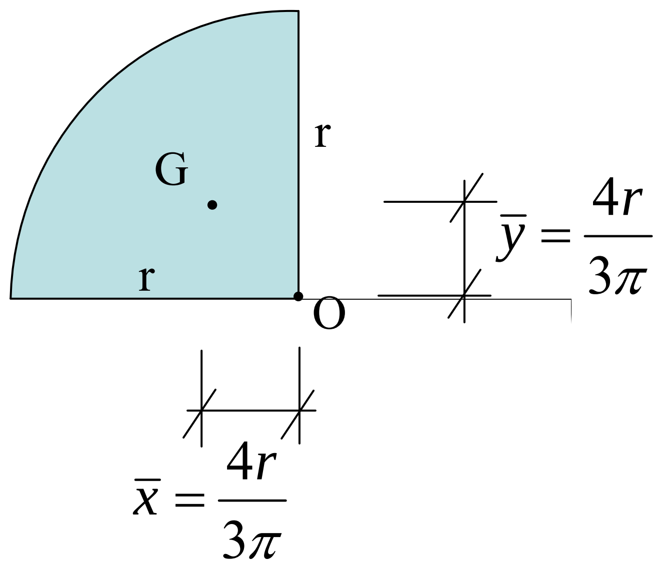
YARIM DAİRE



$$A = \frac{\pi . r^2}{2}$$

VE

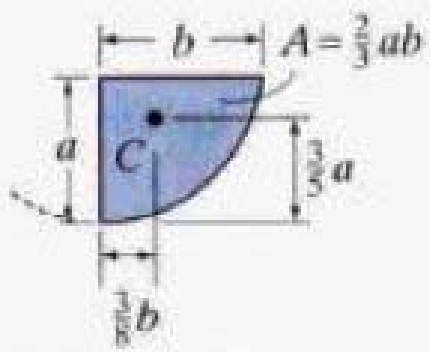
ÇEYREK DAİRE



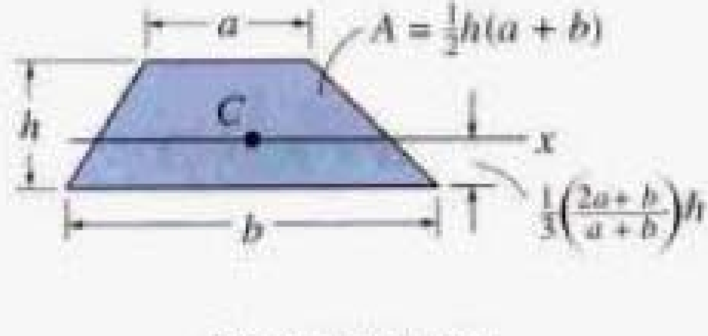
$$A = \frac{\pi . r^2}{4}$$

Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

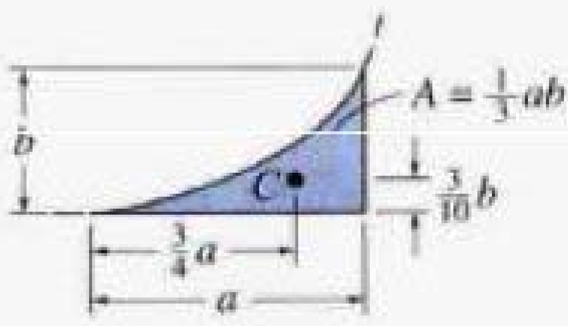
Basit geometrik şekillerin ağırlık merkezleri



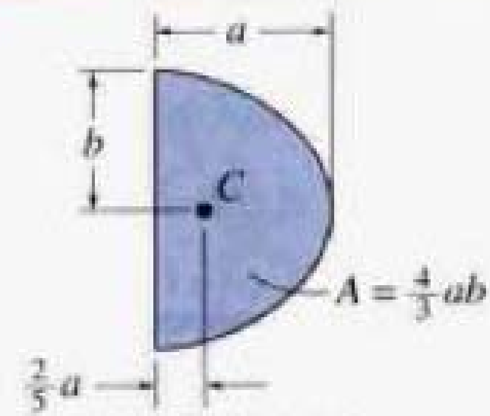
Semiparabolic area



Trapezoidal area



Exparabolic area

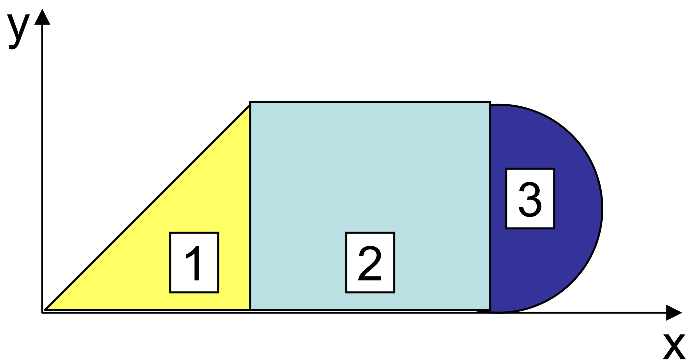


Parabolic area

Kompozit alanların ağırlık merkezleri

Bileşik cisim, dikdörtgen, üçgen, yarım daire şeklinde birbirine bağlı basit şekilli cisimlerden oluşur. Böyle bir cisim genellikle parçalara bölünür, bu parçaların herbirinin ağırlığı ve ağırlık merkezinin konumu bilinirse, tüm cismin ağırlık merkezini belirlemek için integral işlemine gerek kalmaz.

Basit geometrik alanların oluşturduğu kompozit alanların merkezlerinin bulunması için, kompozit alanı oluşturan bileşenlerin merkezleri kullanılır.

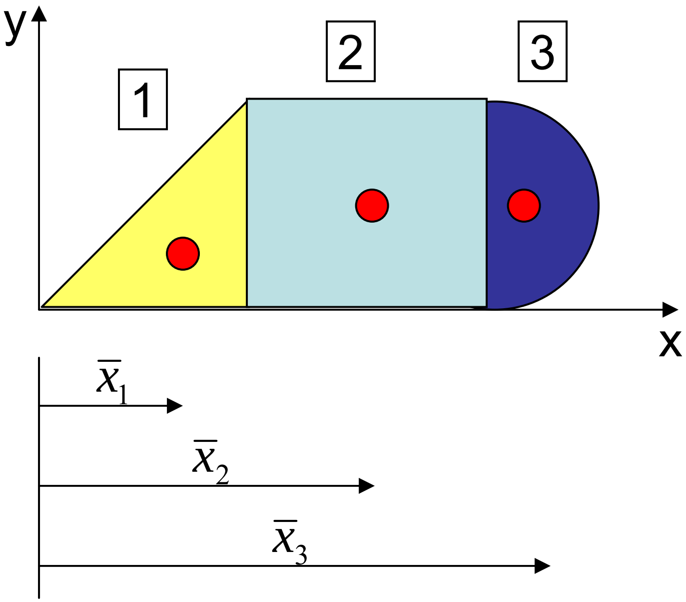


Ortak x ve y eksenlerine göre, her üç şeklin alan momentleri hesaplanarak bu kompozit alanın ağırlık merkezi bulunur.

İntegral yöntemi ile:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{dA} = \frac{\int_{A1} x\,dA + \int_{A2} x\,dA + \int_{A3} x\,dA}{\int_{A1} dA + \int_{A2} dA + \int_{A3} dA}$$

Kompozit alanların ağırlık merkezleri



$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_{A_1} x\,dA}{\int_{A_1} dA} \qquad \int_{A_1} x\,dA = \bar{x}_1 \int_{A_1} dA = \bar{x}_1 A_1$$

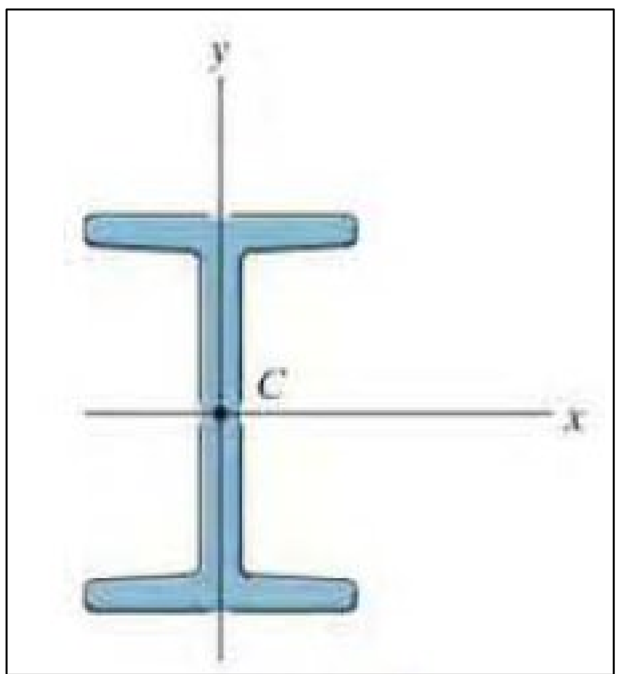
$$\int_{A_2} x\,dA = \bar{x}_2 \int_{A_2} dA \quad ve \quad \int_{A_3} x\,dA = \bar{x}_3 \int_{A_3} dA$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

Önemli noktalar

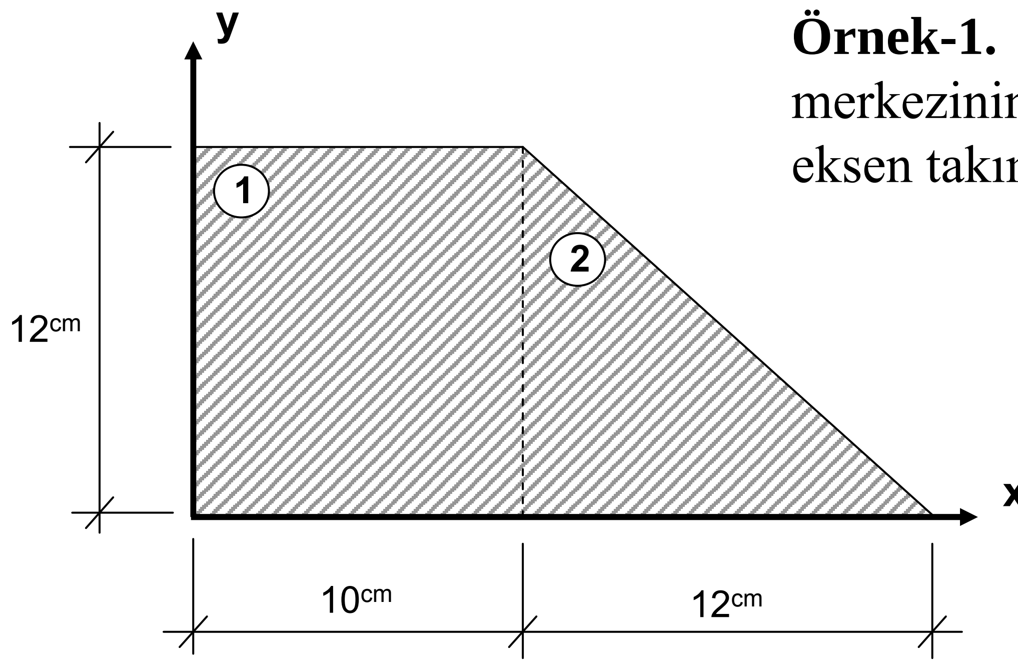
- Merkez bir cismin geometrik merkezini gösterir, bu nokta cisim homojen ise ağırlık/kütle merkezi ile çakışır.
- Merkez formülleri, cismi oluşturan parçaların momentleri ile cismin bileşkesinin momenti arasındaki dengedir.
- Bazı durumlarda, merkez cismin dışında bir yerde olabilir (örn: içi boş halka). Ayrıca, simetrik cisimlerde merkez simetri ekseni üzerinde bulunur



Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

Çalışma soruları

(Örnek 1-10)



Örnek-1. Şekildeki levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını verilen eksen takımına göre hesaplayınız.

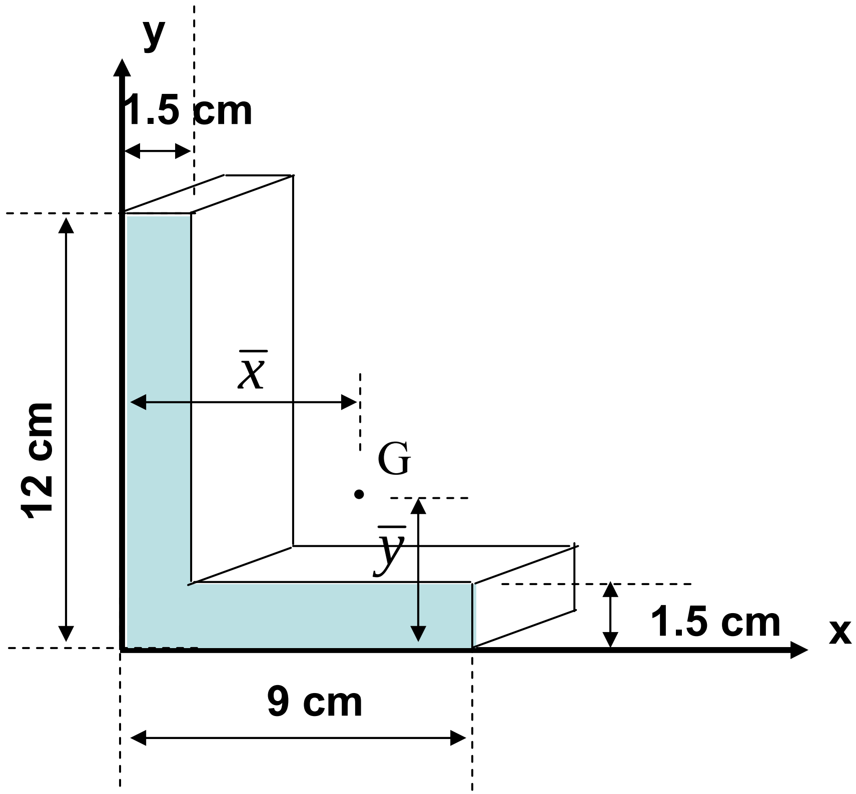
Örnek-1. çözümü

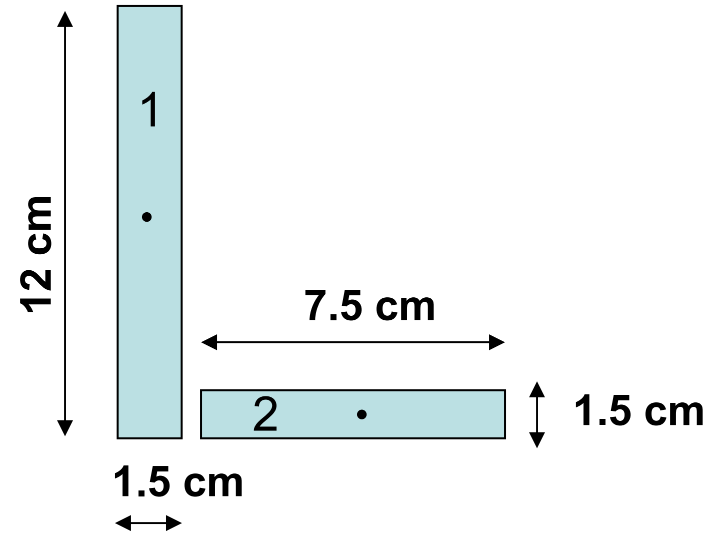
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\overset{1}{(10*12)*5^{cm}} + \overset{2}{(12*12/2)*14^{cm}}}{(10*12)+(12*12/2)} = 8.375^{cm}$$

$$\bar{y} = \frac{(10*12)*6^{cm} + (12*12/2)*4^{cm}}{(10*12)+(12*12/2)} = 5.25^{cm}$$

Örnek 2. Şekilde gösterilen L profilin x-y kesitinde ağırlık merkezinin yerini bulunuz.





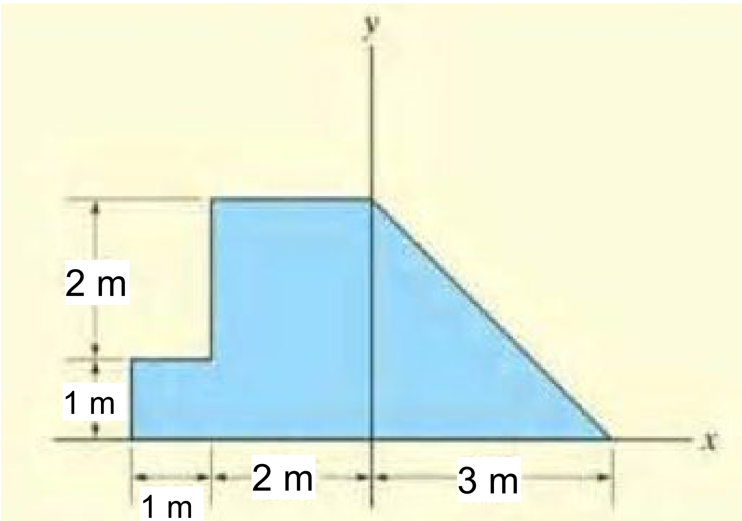
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{(12*1.5)*0.75^{cm} + (7.5*1.5)*(7.5/2+1.5)^{cm}}{(12*1.5)+(7.5*1.5)} = 2.48^{cm}$$

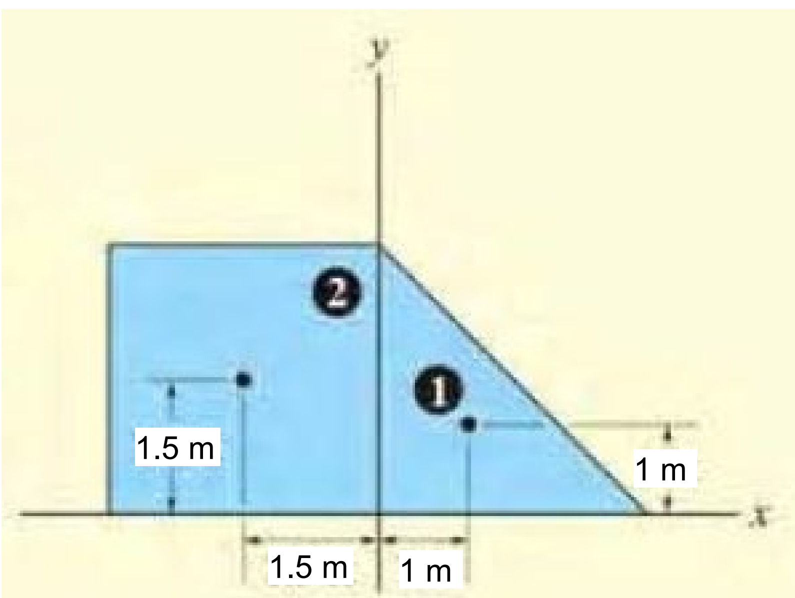
$$\bar{y} = \frac{(12*1.5)*6^{cm} + (7.5*1.5)*0.75^{cm}}{(12*1.5)+(7.5*1.5)} = 3.98^{cm}$$

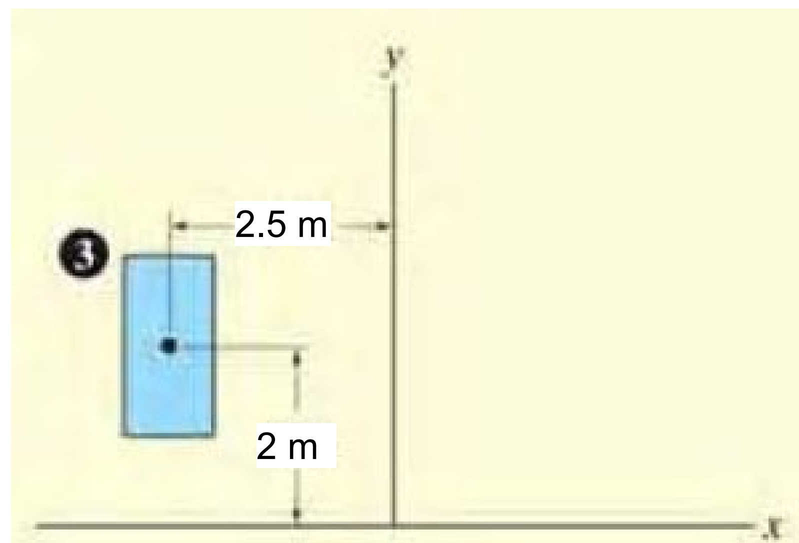
Ağırlık merkezi ve alan merkezi kavramları

Örnek-3. Şekildeki levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını verilen eksen takımına göre hesaplayınız.



Plak aşağıda görüldüğü şekilde üç parçaya bölünür. (3) numaralı parçanın alanı negatiftir, çünkü (2) numaralı parçadan çıkarılmıştır.



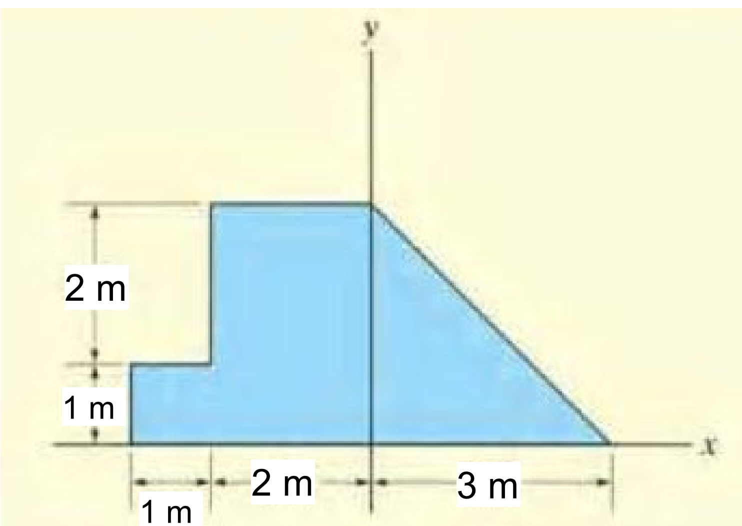


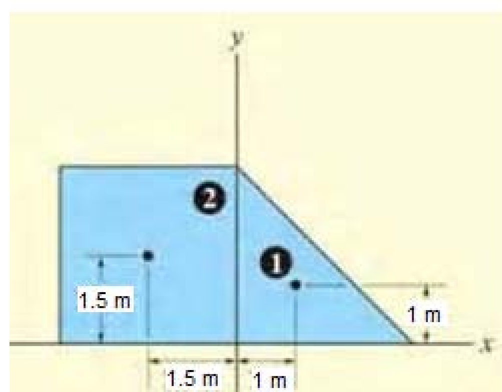
Örnek-3. çözümü

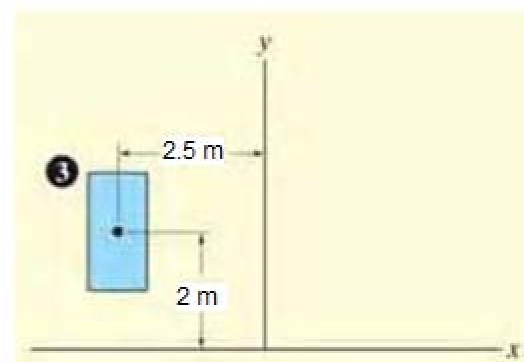
Parça no	A (m^2)	$\overline{x}_i$ (m)	$\overline{y}_i$ (m)	$\overline{x}_i A$(m^3)	$\overline{y}_i A$(m^3)
1	1/2*3*3=4.5	1	1	4.5	4.5
2	3*3=9	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	-2*1=-2	-2.5	2	5	-4
Toplam	$\Sigma A=11.5$			$\Sigma\overline{x}_i=-4$	$\Sigma\overline{y}_i=14$

$$\overline{x}=\frac{\sum \overline{x}_i A_i}{\sum A_i}=\frac{-4}{11.5}=-0.348m$$

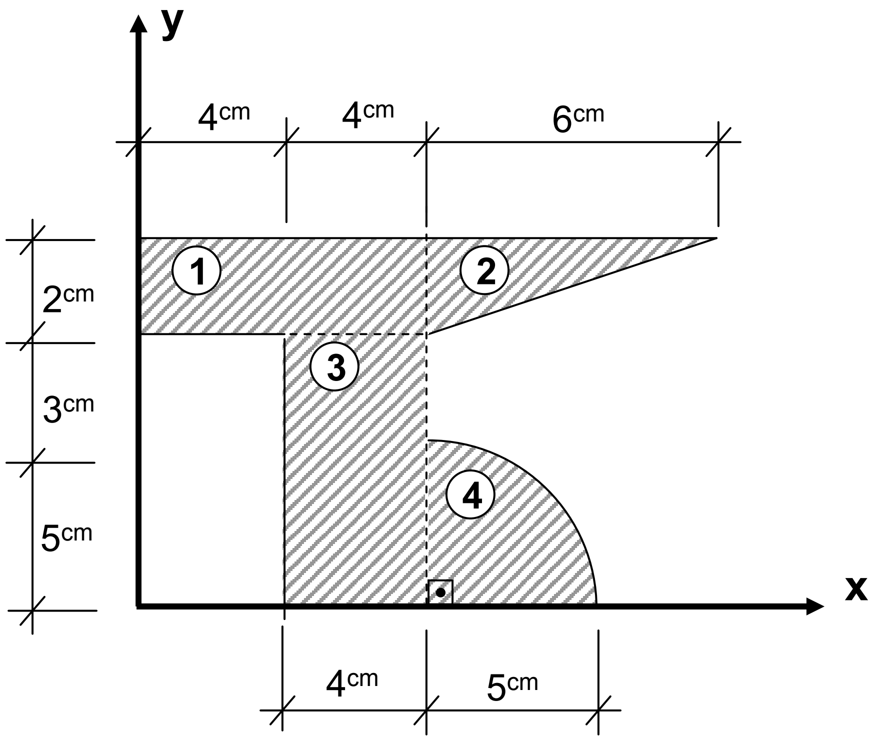
$$\overline{y}=\frac{\sum \overline{y}_i A_i}{\sum A_i}=\frac{14}{11.5}=1.22m$$







Örnek-4. Şekilde verilen x-y eksen takımına göre taralı yüzeyin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.



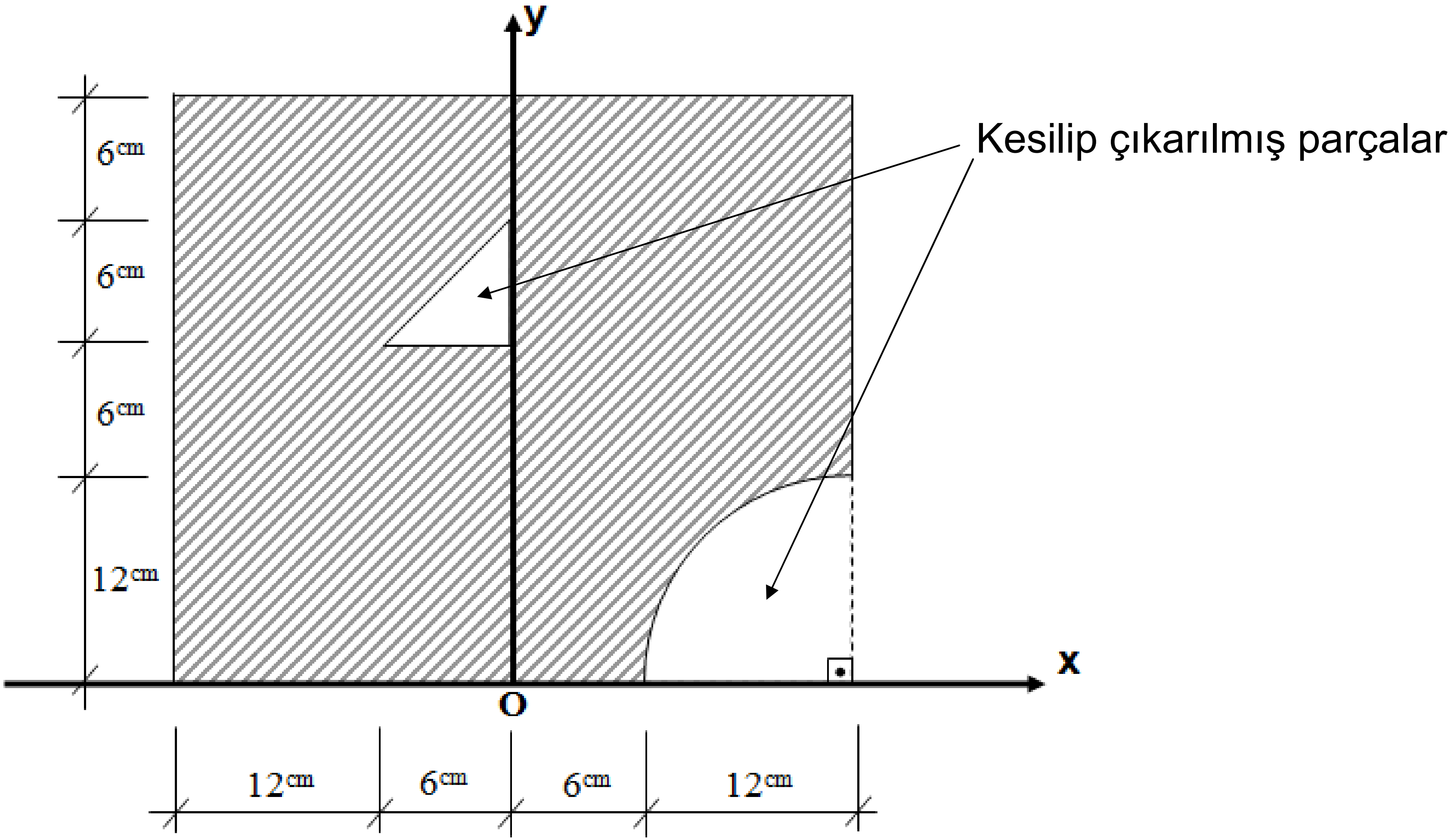
Cevap: $\overline{x} = 6.99cm \quad \overline{y} = 5.02cm$

Örnek-4. çözümü

$$\bar{x} = \frac{\overset{1}{(8*2)*4^{cm}} - \overset{2}{(6*2)/2*(8+2)^{cm}} + \overset{3}{(8*4)*6^{cm}} + \overset{4}{(\pi*5^2/4)*(8+\frac{4*5}{3\pi})^{cm}}}{(8*2)+(6*2)/2+(8*4)+(\pi*5^2/4)} = 6.99^{cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\overset{1}{(8*2)*9^{cm}} - \overset{2}{(6*2)/2*(8+2/3*2)^{cm}} + \overset{3}{(8*4)*4} + \overset{4}{(\pi*5^2/4)*(\frac{4*5}{3\pi})^{cm}}}{(8*2)+(6*2)/2+(8*4)+(\pi*5^2/4)} = 5.02^{cm}$$

Örnek-5. Şekilde verilen x-y eksen takımına göre taralı yüzeyin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.

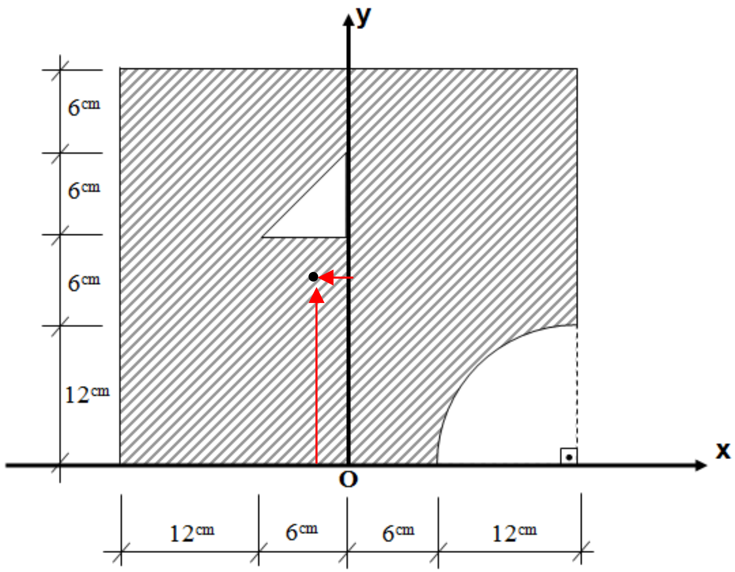


Cevap: $\bar{x} = -1.5cm \quad \bar{y} = 16.09cm$

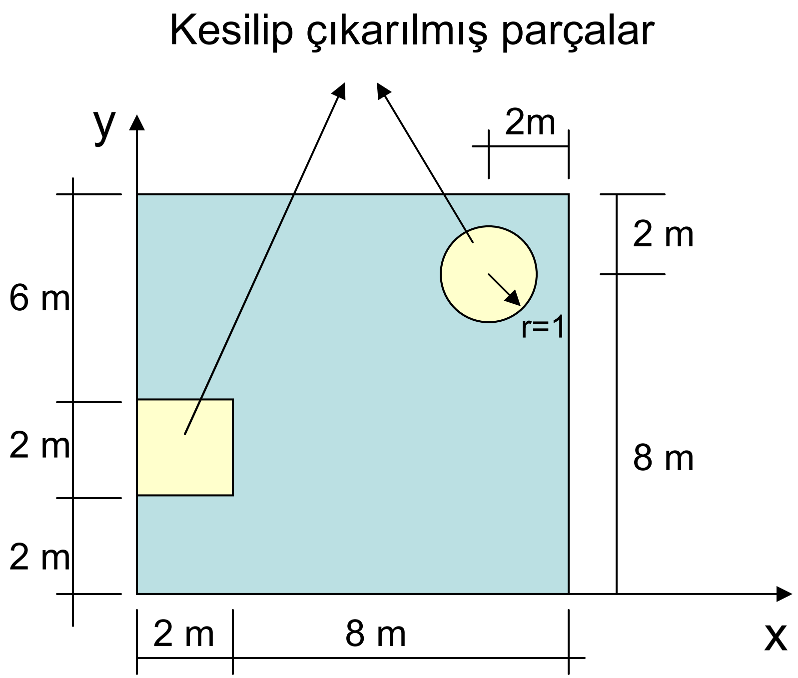
Örnek-5. çözümü

$$\bar{x} = \frac{(36*30)*0^{cm} - (6*6)/2*(-2)^{cm} - (\pi*12^2/4)*(18-\frac{4*12}{3\pi})^{cm}}{(36*30)-(6*6)/2-(\pi*12^2/4)} = -1.5^{cm}$$

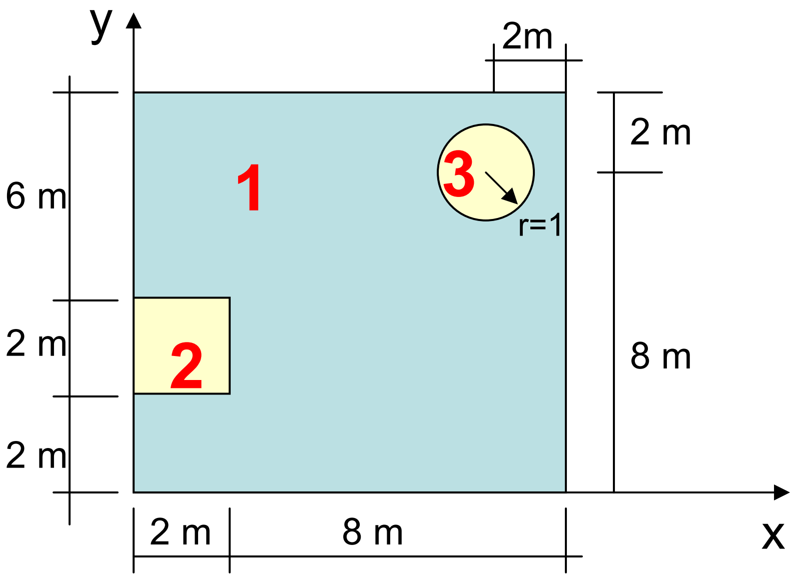
$$\bar{y} = \frac{(36*30)*15^{cm} - (6*6)/2*(18+2)^{cm} - (\pi*12^2/4)*(\frac{4*12}{3\pi})^{cm}}{(36*30)-(6*6)/2-(\pi*12^2/4)} = 16.09^{cm}$$



Örnek-6. Şekilde verilen x-y eksen takımına göre dolu yüzeyin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.



Örnek-6. çözümü



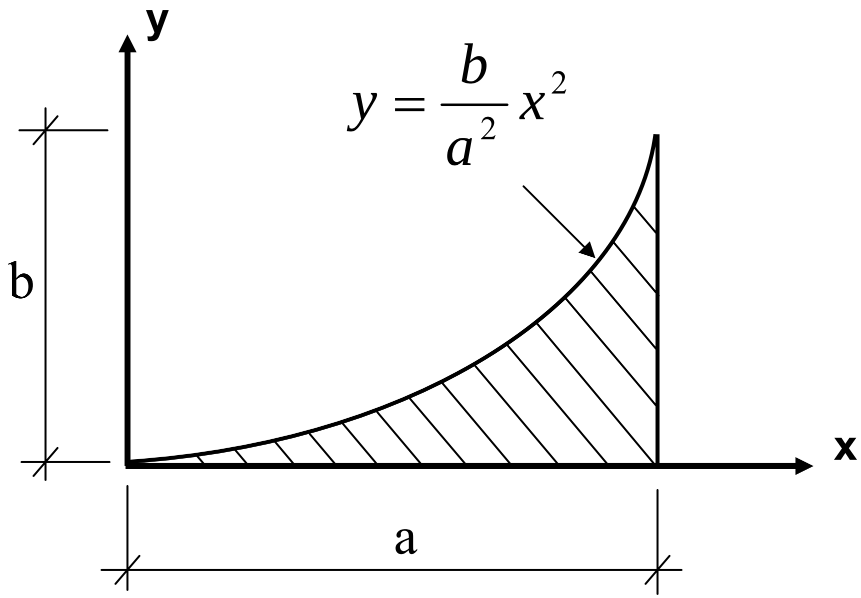
Tablo hazırlanarak da çözüm yapılabilir.

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

Alan No	Alan (m^2)	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x}_i A_i (m^3)$	$\bar{y}_i A_i (m^3)$
1	100	5	5	500	500
2	-4	1	3	-4	-12
3	-3.14	8	8	-25.13	-25.13
Toplam	92.86			470.87	462.87

$$\bar{x} = \frac{470.87}{92.86} = 5.07m \qquad \bar{y} = \frac{462.87}{92.86} = 4.98m$$

Örnek-7. Şekildeki taralı yüzeyin ağırlık merkezini hesaplayınız.



Örnek-7. çözümü

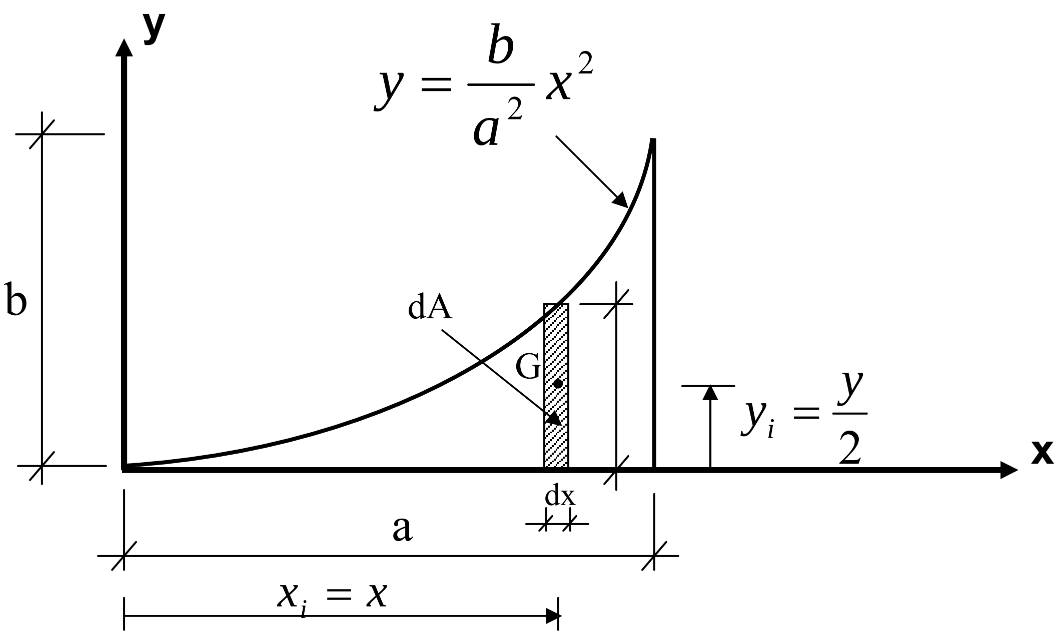
1. Önce alan bulunur: $$A = \int_0^{x=a} dA$$

2. Sonra S_x ve S_y statik momentleri hesaplanıp alana bölünerek ağırlık merkezi bulunur:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y_i . dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x_i . dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

Örnek-7. çözümü



Öncelikle küçük dikdörtgen parçanın dA alanı x=0, x=a arasında integre edilerek tüm alan bulunur:

$$dA = y dx$$

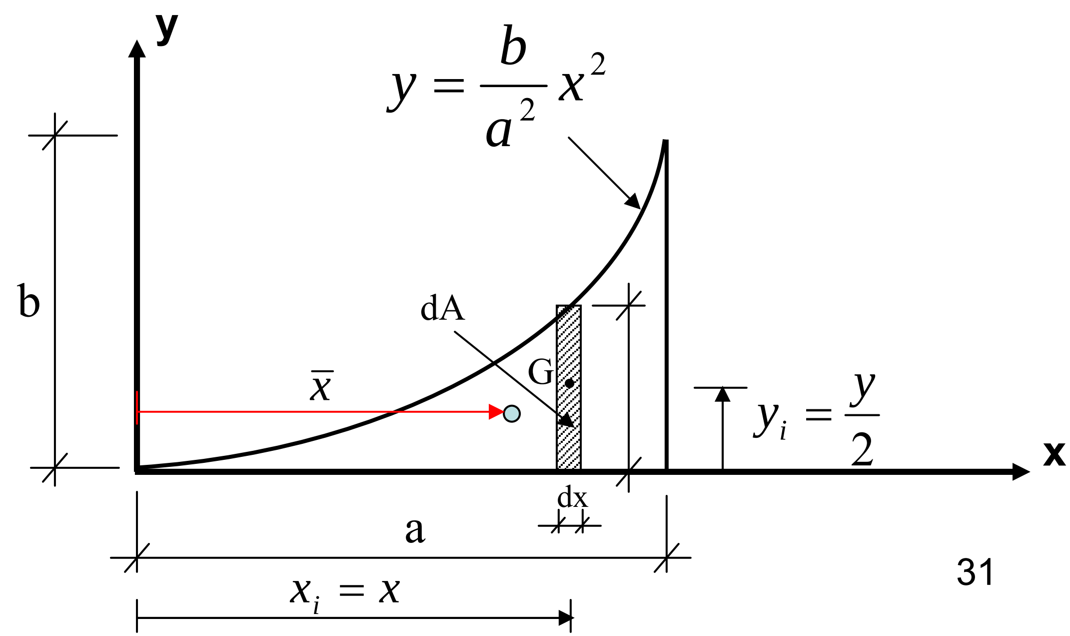
$$dA = \frac{b}{a^2} x^2 dx$$

$$A = \int_0^{x=a} \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{a.b}{3}$$

Örnek-7. çözümü

$$S_y = \int_A x_i . dA = \int_0^{x=a} x \frac{b}{a^2} x^2 dx = \int_0^{x=a} \frac{b}{a^2} x^3 dx = \frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

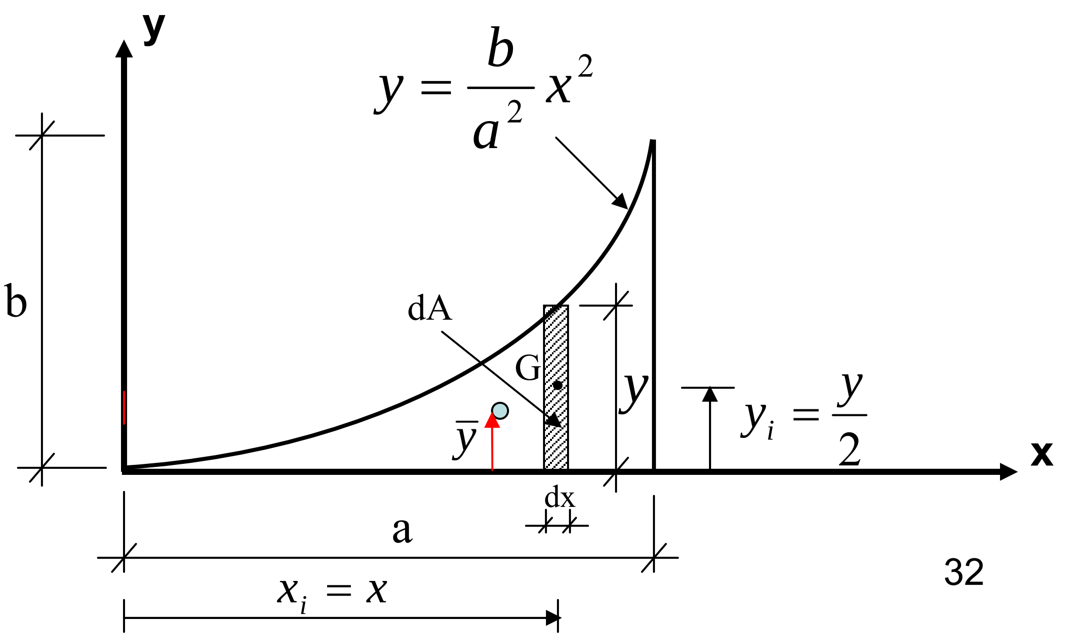
$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3a}{4}$$



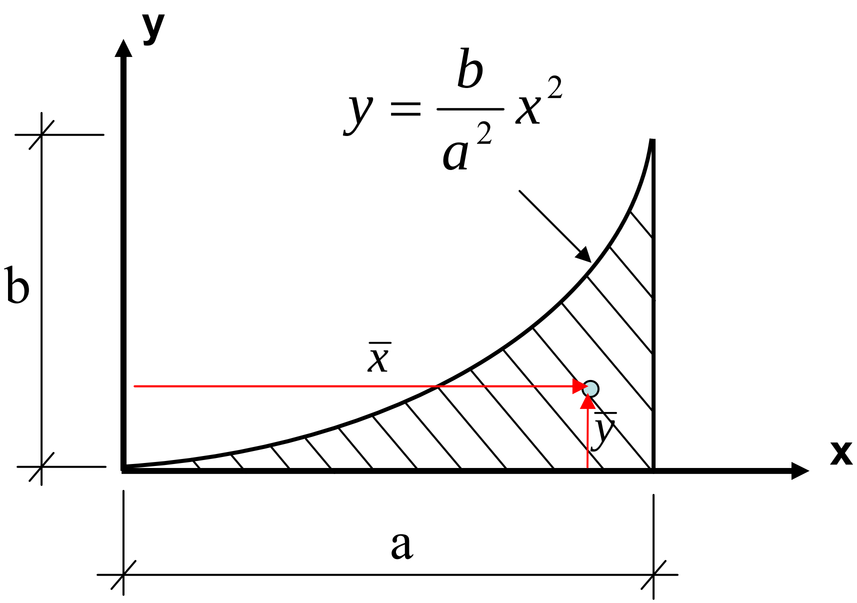
Örnek-7. çözümü

$$S_x = \int_A y_i.dA = \int_0^{x=a} \frac{y}{2}\frac{b}{a^2}x^2dx = \int_0^{x=a}\frac{b^2x^4}{2a^4}dx = \left.\frac{b^2x^5}{10a^4}\right|_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\dfrac{ab^2}{10}}{\dfrac{ab}{3}} = \frac{3b}{10}$$



Örnek-7. çözümü

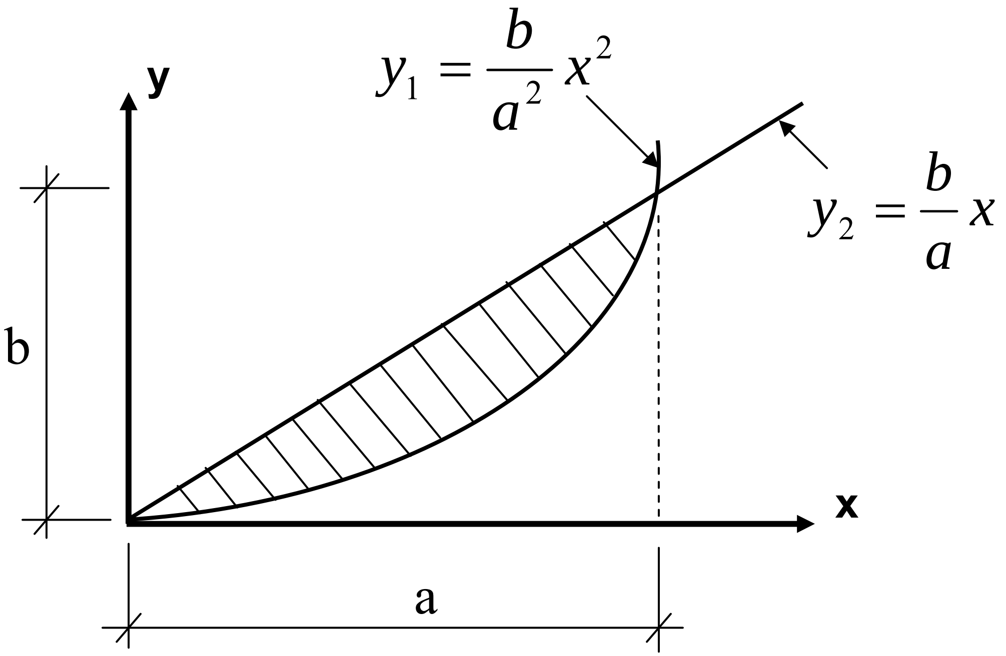


$$A = \frac{a.b}{3}$$

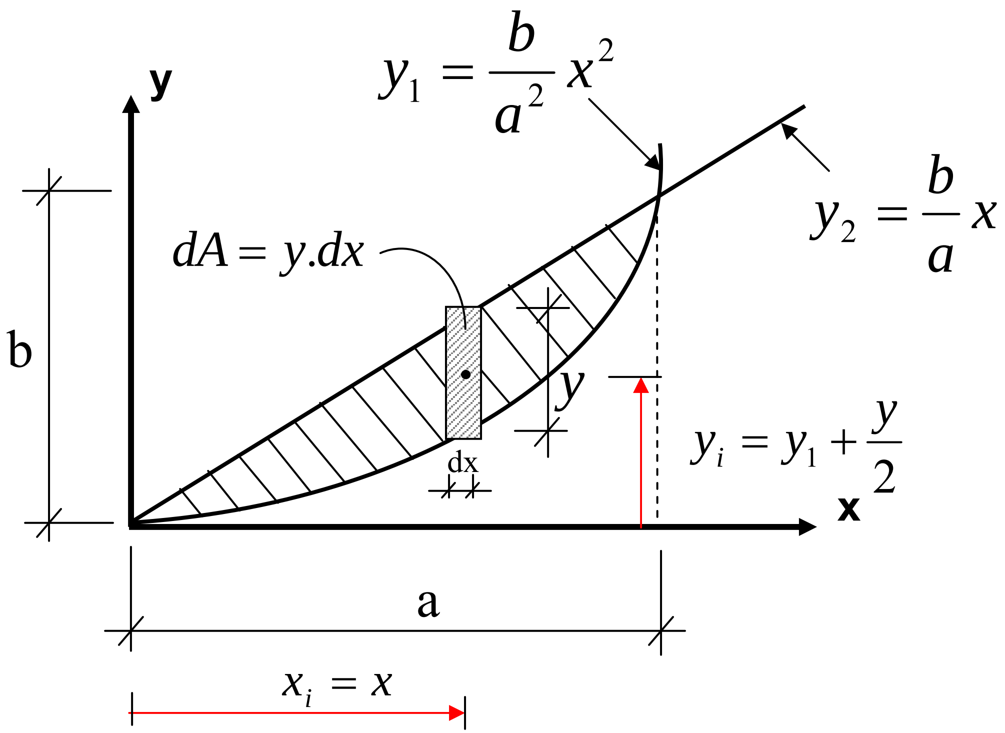
$$\bar{x} = \frac{3a}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{3b}{10}$$

Örnek-8. Şekildeki taralı yüzeyin ağırlık merkezini hesaplayınız.



Örnek-8. çözümü



$$y = y_2 - y_1$$

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2 \quad \text{olur.}$$

$$y_i = y_1 + \frac{y}{2} = \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{b}{2a}x - \frac{b}{2a^2}x^2$$

$$\boxed{y_i = \frac{b}{2a^2}x^2 + \frac{b}{2a}x} \quad \text{olur.}$$

Örnek-8. çözümü

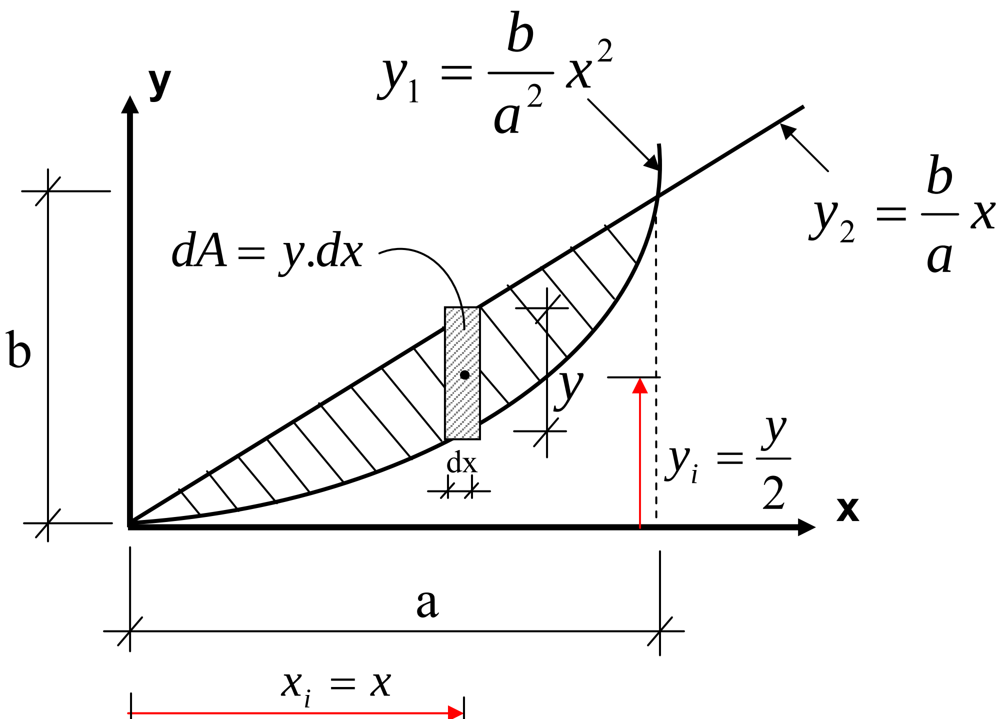
$$dA = y.dx$$

$$\boxed{dA = (\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2)dx}$$

$$A = \int_0^{x=a} (\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2)dx$$

$$A = (\frac{b}{2a}x^2 - \frac{b}{3a^2}x^3)\Big|_0^a = \frac{ba^2}{2a} - \frac{ba^3}{3a^2} = \frac{ba}{2} - \frac{ba}{3}$$

$$A = \frac{ab}{6}$$



Örnek-8. çözümü

$$S_y = \int_A x_i . dA = \int_0^{x=a} \left(\frac{b}{a}x^2 - \frac{b}{a^2}x^3\right)dx = \left(\frac{bx^3}{3a} - \frac{bx^4}{4a^2}\right)\Bigg|_0^a$$

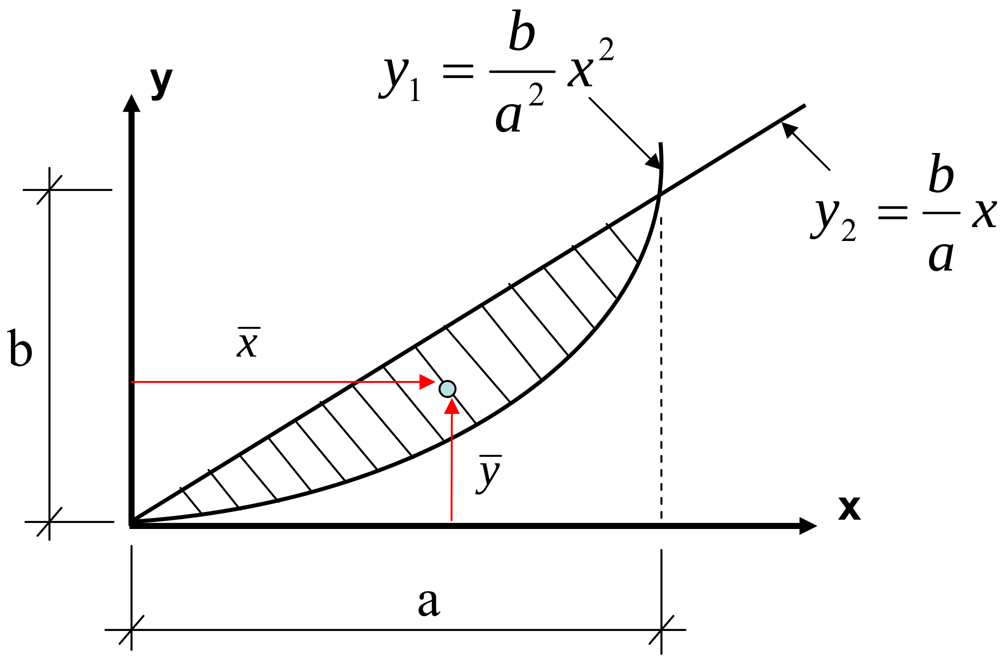
$$S_y = \frac{ba^3}{3a} - \frac{ba^4}{4a^2} = \frac{a^2b}{3} - \frac{a^2b}{4} \Rightarrow S_y = \frac{a^2b}{12} \qquad \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^2b}{12}}{\frac{ab}{6}} = \frac{a}{2}$$

$$S_x = \int_A y_i . dA = \int_0^{x=a} \left(\frac{b}{2a^2}x^2 + \frac{b}{2a}x\right)\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2\right)dx$$

$$S_x = \int_0^{x=a} \left(\cancel{\frac{b^2}{2a^3}x^3} - \frac{b^2}{2a^4}x^4 + \frac{b^2}{2a^2}x^2 - \cancel{\frac{b^2}{2a^3}x^3}\right)dx = \int_0^{x=a} \left(\frac{b^2}{2a^2}x^2 - \frac{b^2}{2a^4}x^4\right)dx$$

$$S_x = \left(\frac{bx^3}{6a^2} - \frac{b^2x^5}{10a^4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3b}{6a^2} - \frac{a^5b^2}{10a^4} \Rightarrow S_x = \frac{ab^2}{15} \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{ab^2}{15}}{\frac{ab}{6}} = \frac{2b}{5}$$

Örnek-8. çözümü

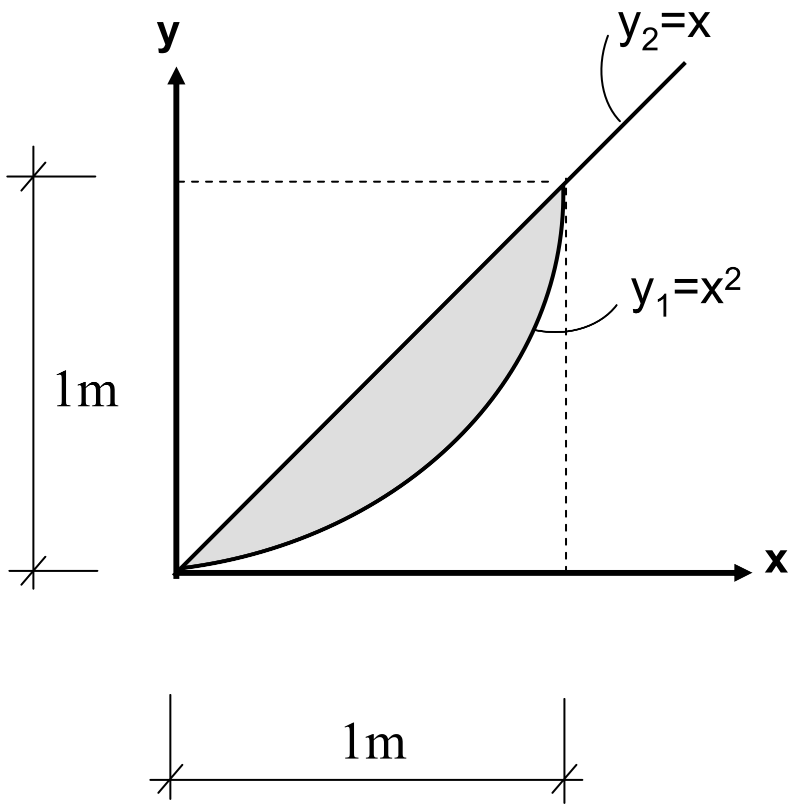


$$A = \frac{a.b}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2}$$

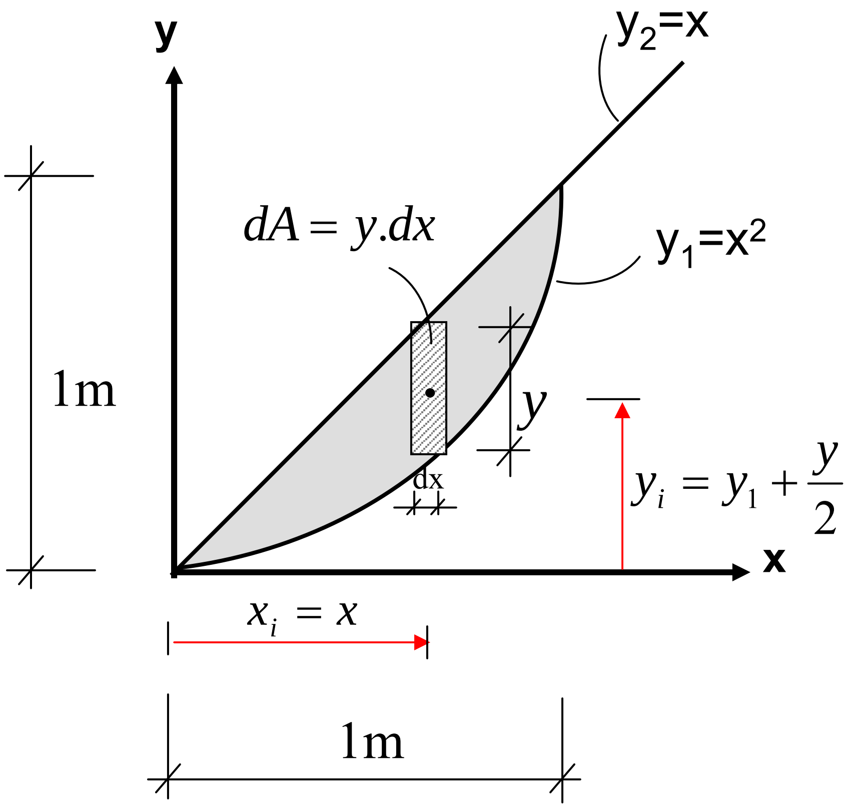
$$\bar{y} = \frac{2b}{5}$$

Örnek-9. Şekildeki taralı yüzeyin ağırlık merkezini hesaplayınız.



Örnek.7'nin sayısallaştırılmış halidir.

Örnek-9. Şekildeki taralı yüzeyin ağırlık merkezini hesaplayınız.



$$y = y_2 - y_1$$
$$y = x - x^2$$ olur.

$$y_i = y_1 + \frac{y}{2} = x^2 + \frac{x - x^2}{2}$$

$$\boxed{y_i = \frac{x^2 + x}{2}}$$ olur.

Örnek-9. çözümü

$$dA = y.dx$$

$$\boxed{dA = (x - x^2)dx}$$

$$A = \int_0^{x=1} (x - x^2)dx$$

$$A = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S_y = \int_A x_i.dA = \int_0^{x=1} (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

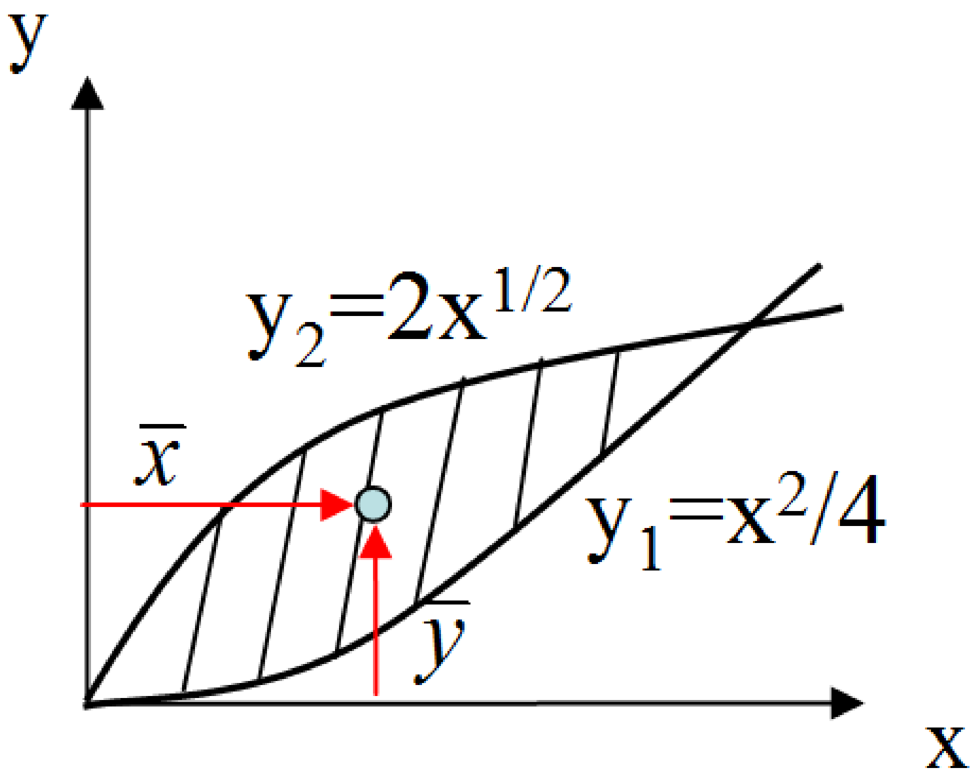
$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$S_x = \int_A y_i.dA = \int_0^{x=1} \left(\frac{x^2 + x}{2}\right)(x - x^2)dx = \int_0^{x=1} \frac{1}{2}(\cancel{x^3} - x^4 + x^2 - \cancel{x^3})dx$$

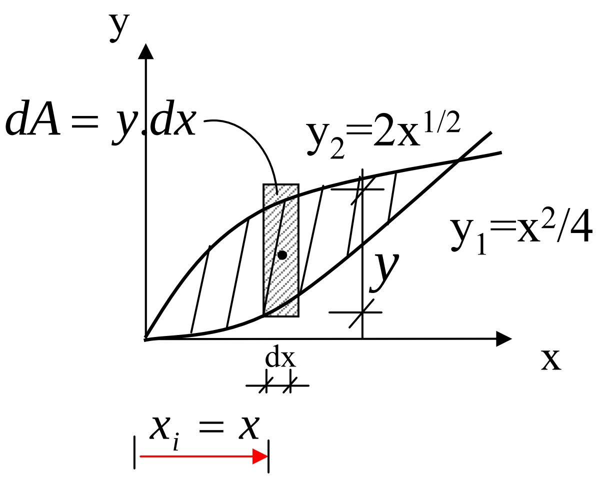
$$S_x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

Örnek-10. Şekildeki taralı yüzeyin ağırlık merkezini hesaplayınız.



Örnek-10. çözümü



$$dA = y.dx$$

$$\boxed{dA = (2x^{1/2} - \frac{x^2}{4})dx}$$

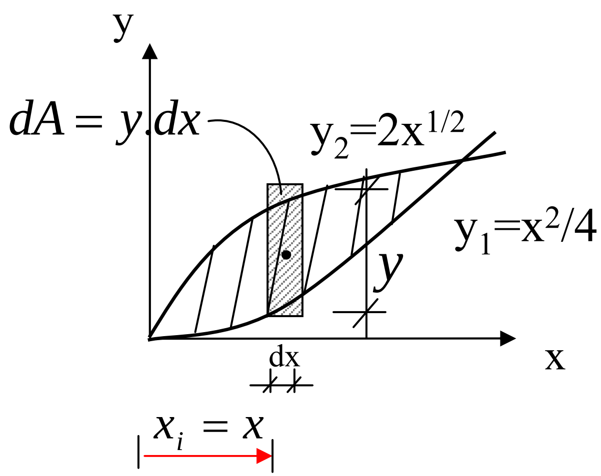
$$A = \int_0^{x=4} (2x^{1/2} - \frac{x^2}{4})dx$$

$$A = (\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{12})\Big|_0^4 = 10.67 - 5.33 = 5.33$$

$$\Rightarrow S_y = \int_A x_i.dA = \int_0^{x=4} (2x^{3/2} - \frac{x^3}{4})dx = (\frac{4x^{5/2}}{5} - \frac{x^4}{16})\Big|_0^4 = 25.6 - 16 = 9.6$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{9.6}{5.33} = 1.8$$

Örnek-10. çözümü



$$dA = y.dx$$

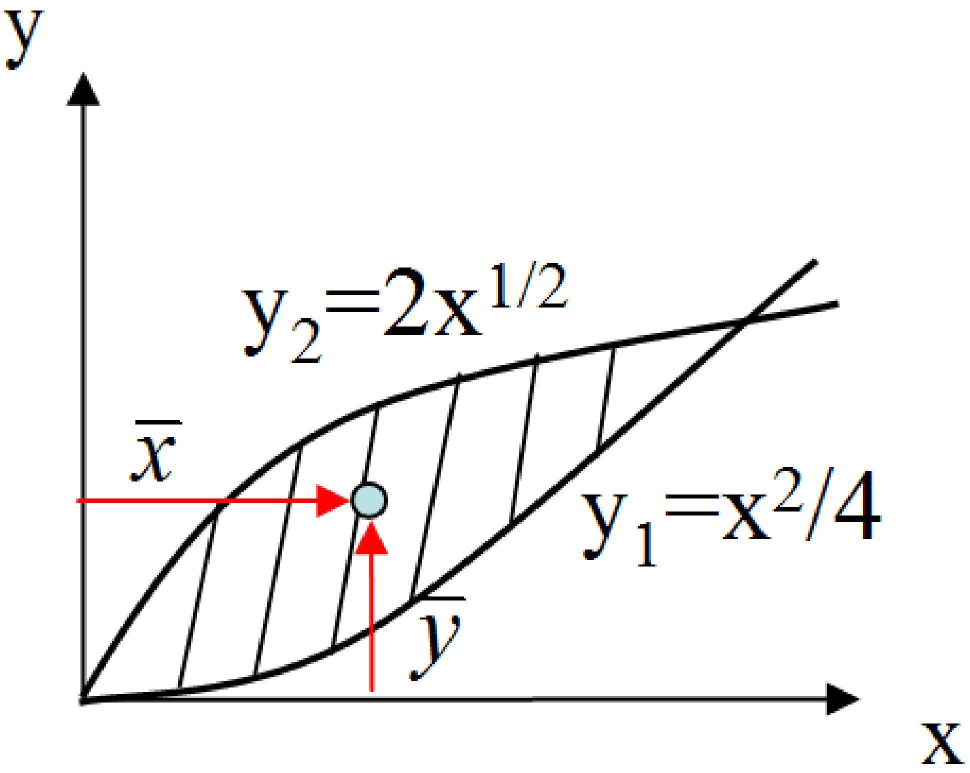
$$dA = (2x^{1/2} - \frac{x^2}{4})dx$$

$$y_i = y_1 + \frac{y}{2} = \frac{x^2}{4} + (x^{1/2} - \frac{x^2}{8}) = \frac{x^2}{8} + x^{1/2}$$

$$S_x = \int_A y_i.dA = \int_0^{x=4} (\frac{x^2}{8} + x^{1/2})(2x^{1/2} - \frac{x^2}{4})dx = \int_0^{x=4} (\cancel{\frac{x^{5/2}}{4}} - \frac{x^4}{32} + 2x - \cancel{\frac{x^{5/2}}{4}})dx$$

$$S_x = \int_0^{x=4} (2x - \frac{x^4}{32})dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{160})\bigg|_0^4 = 16 - 6.4 = 9.6$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{9.6}{5.33} = 1.8$$

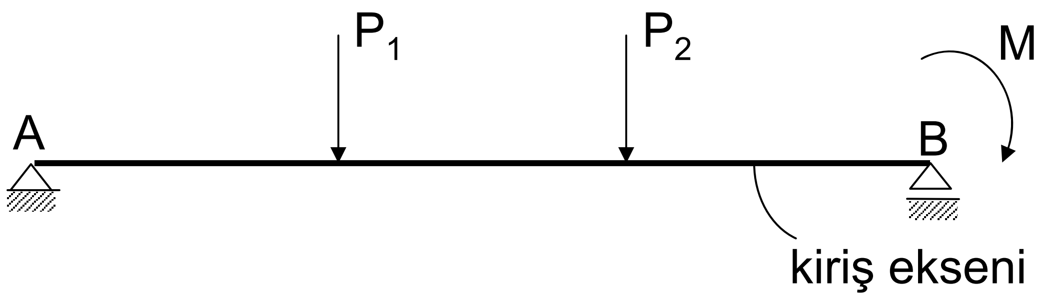


$$\bar{x} = 1.8m$$

$$\bar{y} = 1.8m$$

$$A = 5.33m^2$$

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

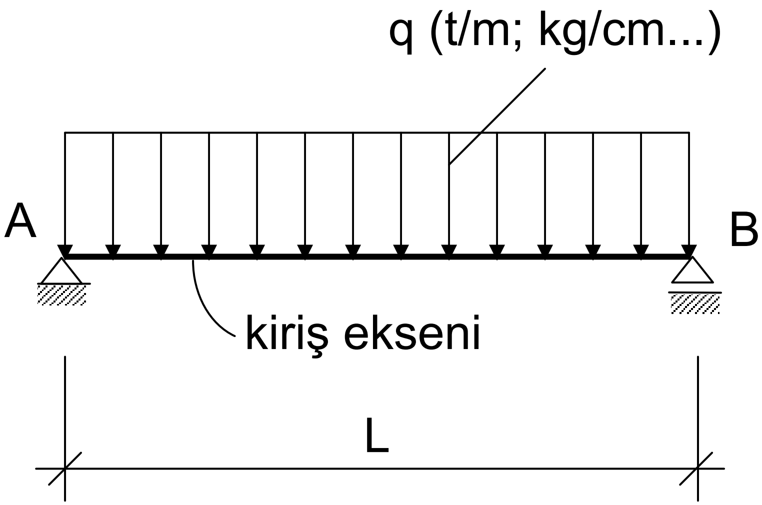


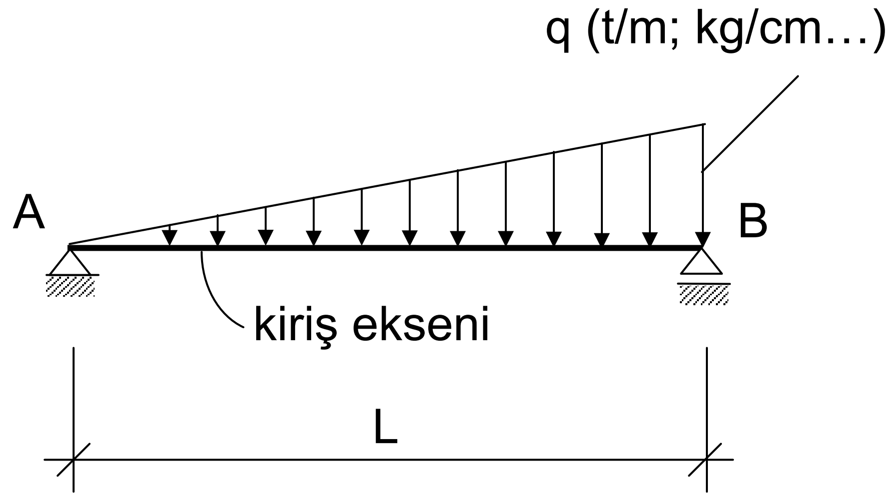
- P_1 ve P_2 tekil kuvvetler
- M tekil moment

- Özel durumlar dışında; genel olarak tekil kuvvet ve momentler gerçekte yoktur. Gerçekte kuvvetler, belli bir yüzey üzerinde veya bir hacim içinde yayılıdır. Genelde kuvvetler; temas yüzeyine, ağırlık kuvvetleri ise hacme yayılıdır.

- Kuvvetlerin yayılı olduğu yüzey veya hacim küçük ise; kuvvetler tekil kuvvet olarak dikkate alınırlar. Ancak yüzey ve hacimler ihmal edilemeyecek kadar büyük ise yayılı yükler dikkate alınmalıdır.

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

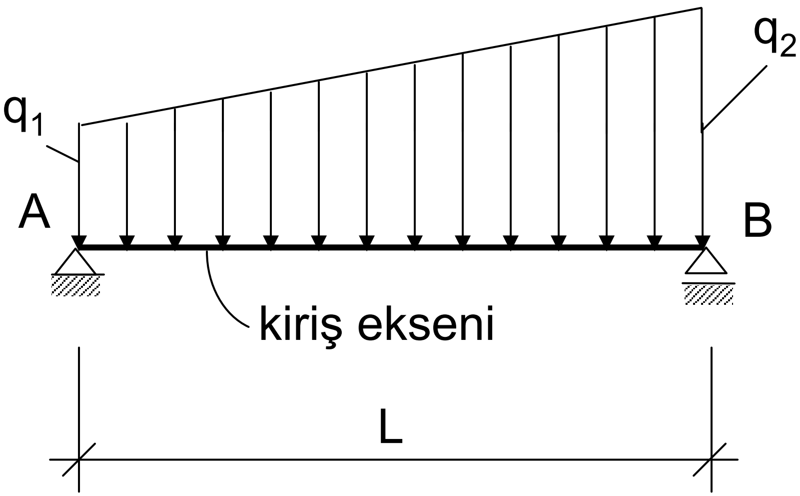




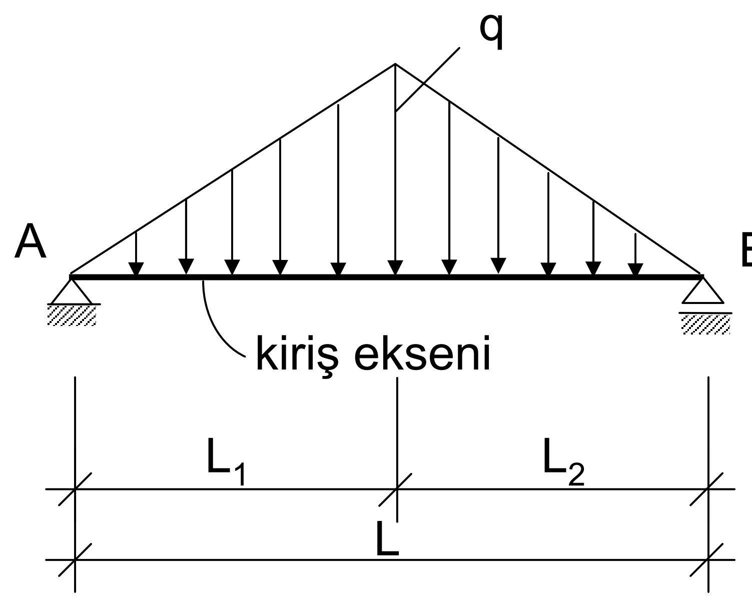
Düzgün yayılı yük (örneğin; duvar yükü, zati yük vb.)

Düzgün yayılı üçgen yük

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)



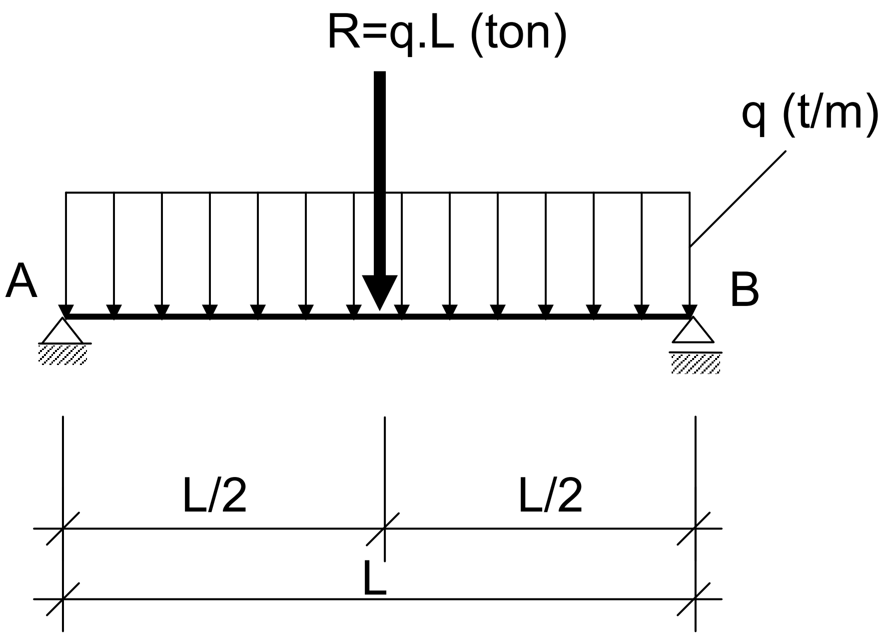
Düzgün yayılı trapez
(yamuk) yük



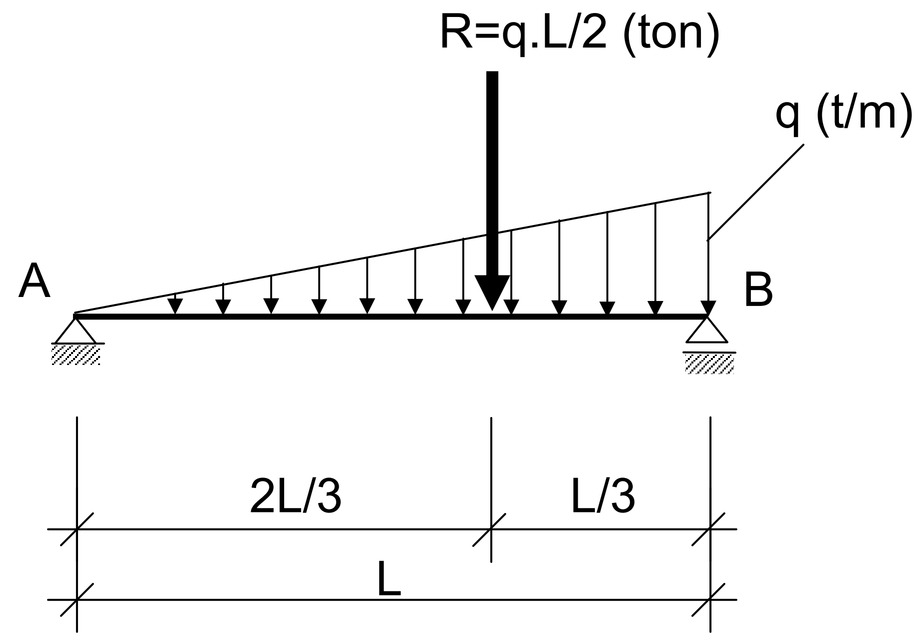
Değişken üçgen yayılı yük
(döşemeden kirişe aktarılan yük)

Yukarıda gösterildiği gibi, kirişlere etkiyen yayılı yükler, kiriş eksenine dik yönde uygulanan yüklerdir. Yayılı yükler yerine, şiddeti yayılı yüke eşit tekil (=konsantre) bir yük yazılabilir. Bu yükler ve etkidiği yerler sonraki slaytta sunulmuştur.

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

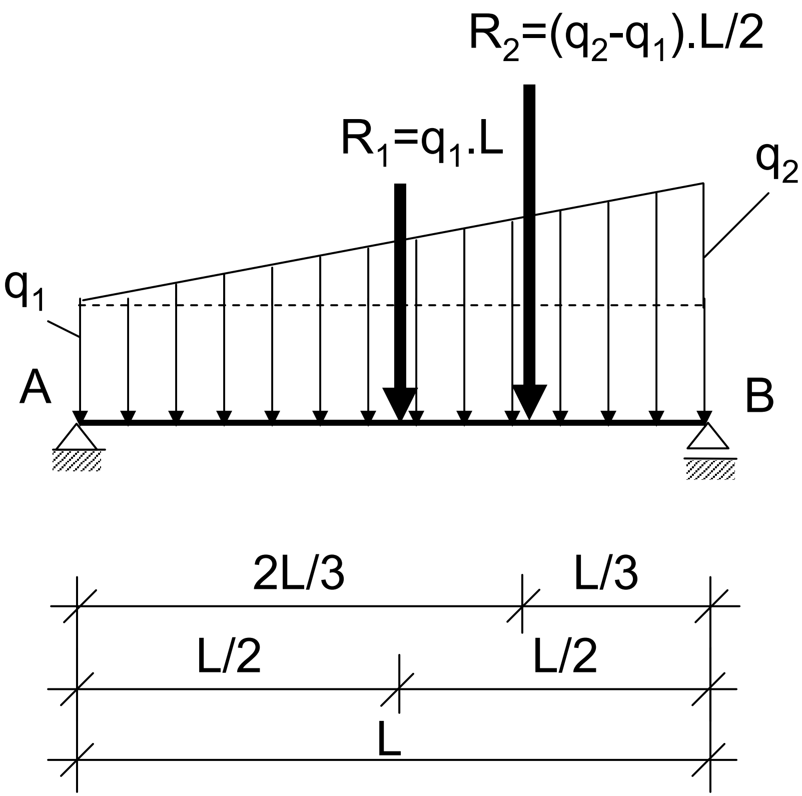


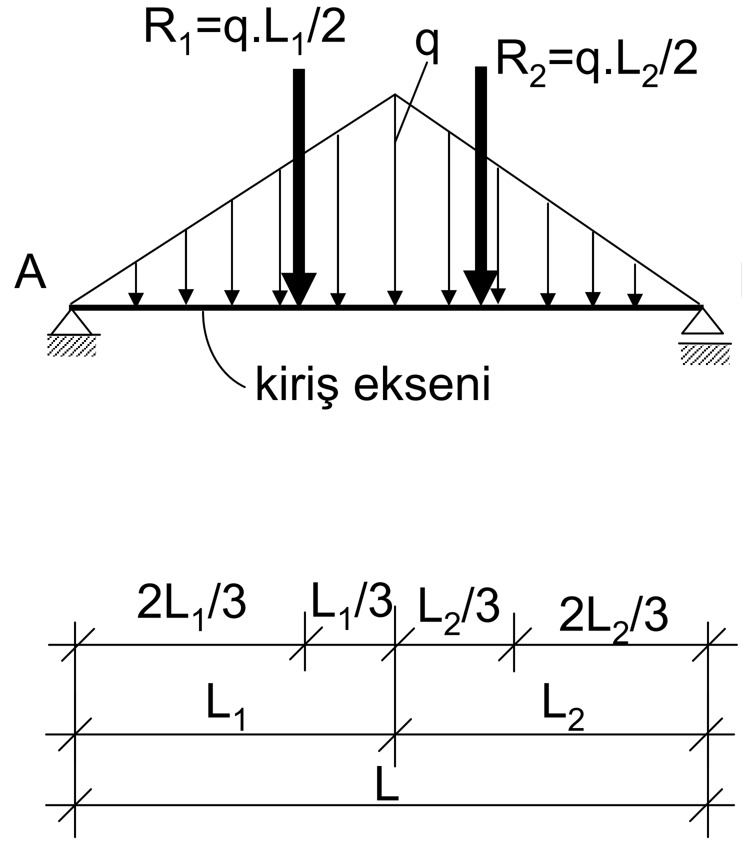
Düzgün yayılı yük (örneğin; duvar yükü, zati yük vb.)



Düzgün yayılı üçgen yük

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)





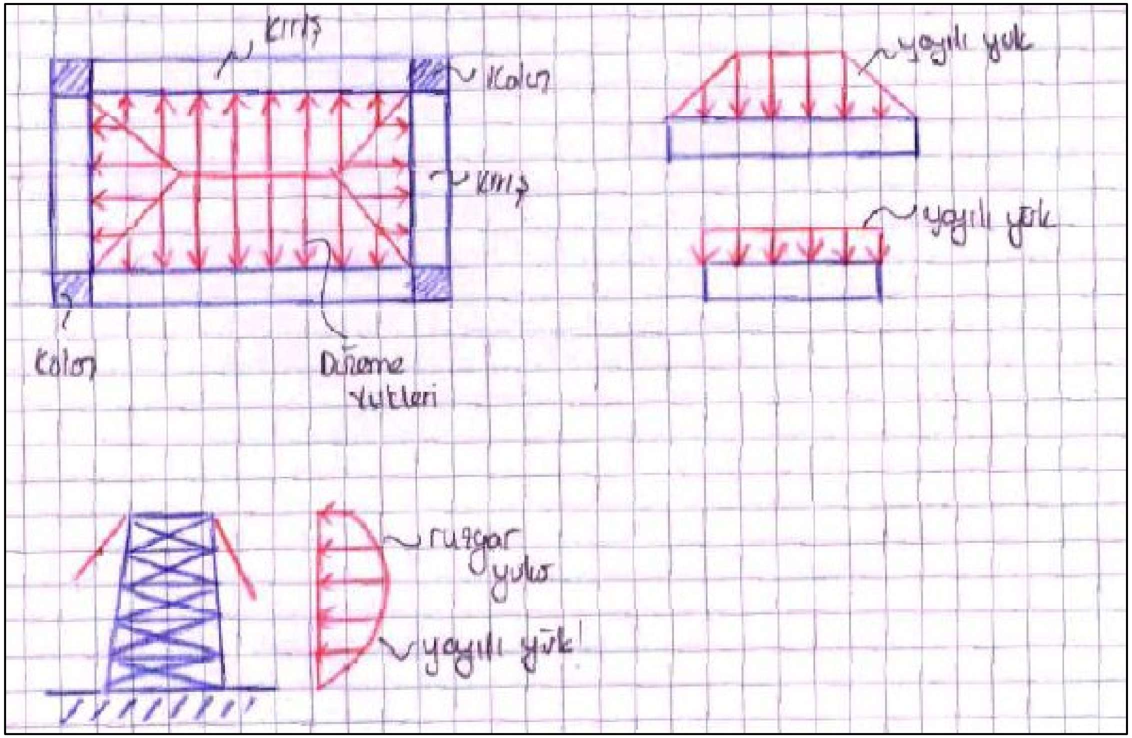
Trapez; dikdörtgen ve üçgen olmak üzere 2 elemana ayrılır.

2 farklı üçgen tek-tek dikkate alınır.

Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

Bir çok durumda, cismin çok büyük bir yüzey alanı, rüzgarın, akışkanların neden olduğu veya sadece cismin yüzeyi aracılığıyla taşınan malzeme ağırlığı gibi yayılı yüklere maruz kalabilir.

Bu yüklerin yüzey üzerindeki her bir noktadaki şiddeti N/m^2 birimi ile ölçülebilen ***p*** basıncı olarak tanımlanır.

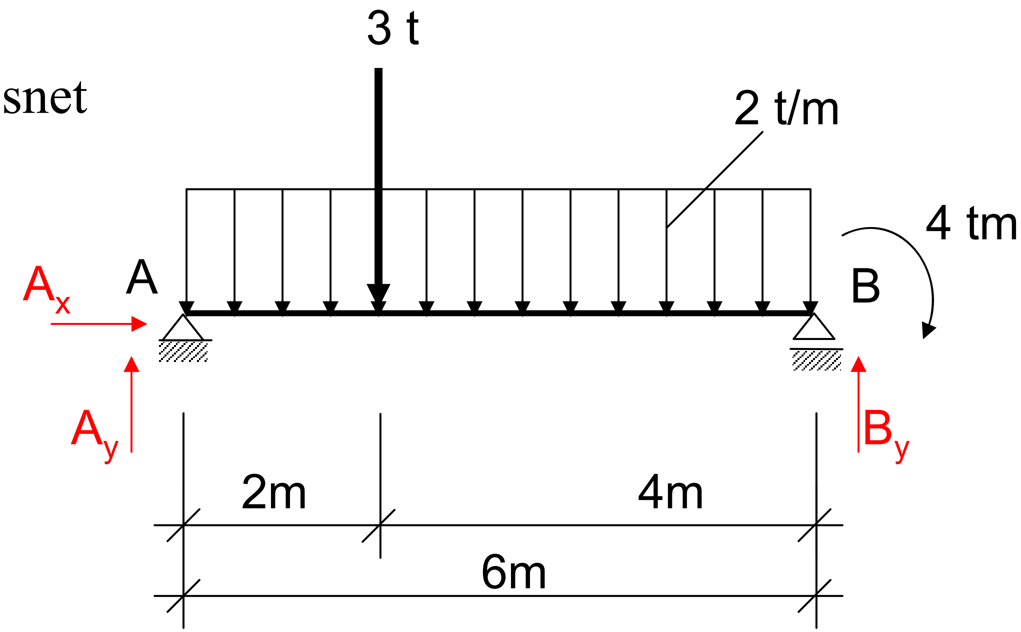


Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

Çalışma soruları

(Örnek 11-12-13-14-15)

Örnek-11. Şekildeki kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



Çözüm:

$\sum Fx = 0$ $\quad A_x=0$

$\xrightarrow{+}$

$\sum Fy = 0$ $\quad A_y+B_y-3^t-(2^{t/m}*6)=0 \qquad A_y + B_y = 15^t$

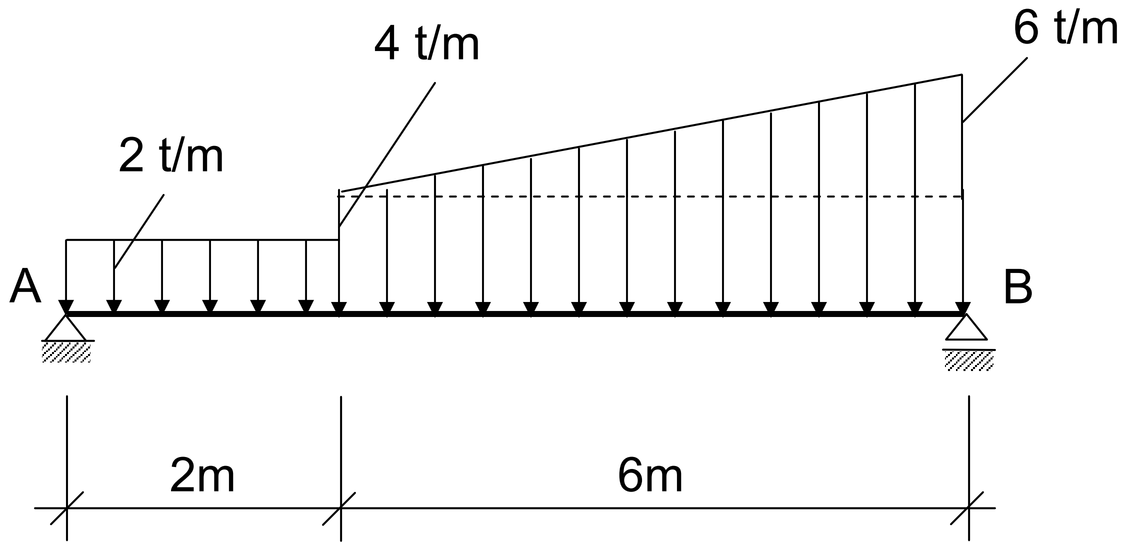
$\uparrow +$

$\sum M_A = 0$ $\quad -3^t*2^m-(2^{t/m}*6)*3^m-4^{tm}+6*B_y=0 \qquad B_y = 7.67^t \ (\uparrow)$

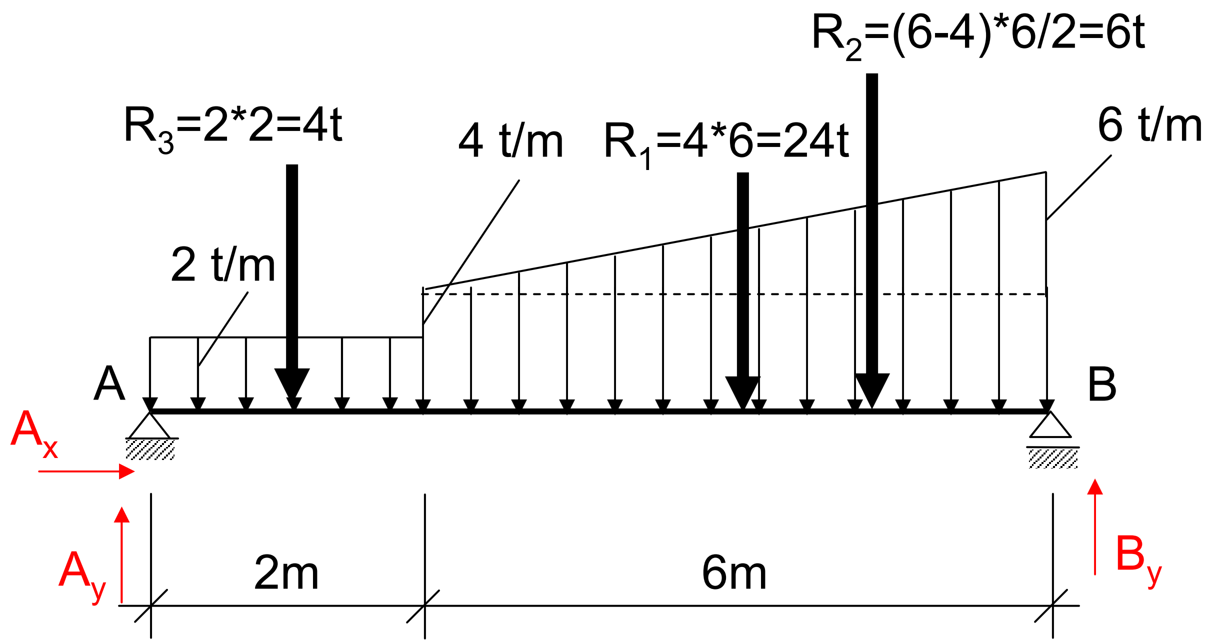
+

$A_y = 7.33^t \ (\uparrow)$

Örnek-12. Şekildeki kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



Örnek-12. çözümü



$\sum Fx = 0$ $A_x=0$

$\sum Fy = 0$

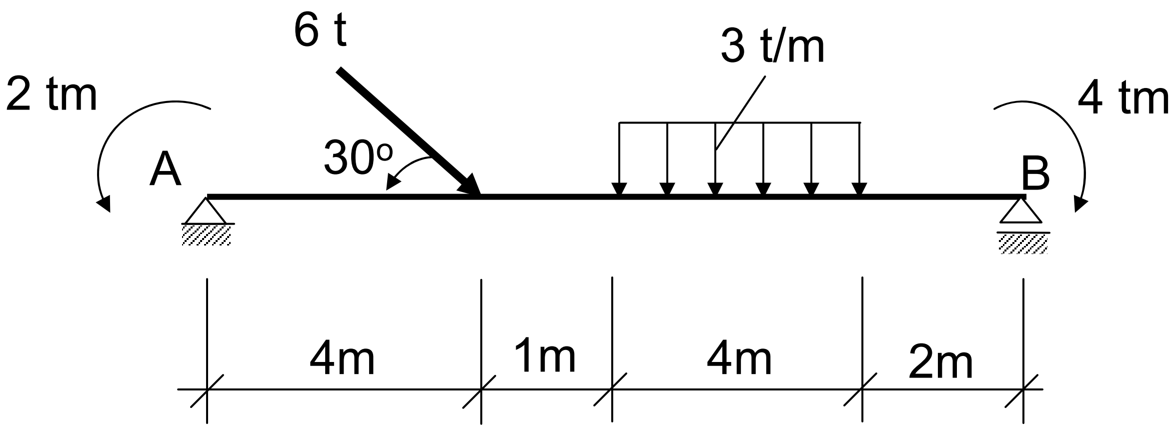
$A_y+B_y-(2^{t/m}*2)-(4^{t/m}*6)-(2^{t/m}*6/2)=0$ $A_y + B_y = 34^t$

$\sum M_A = 0$

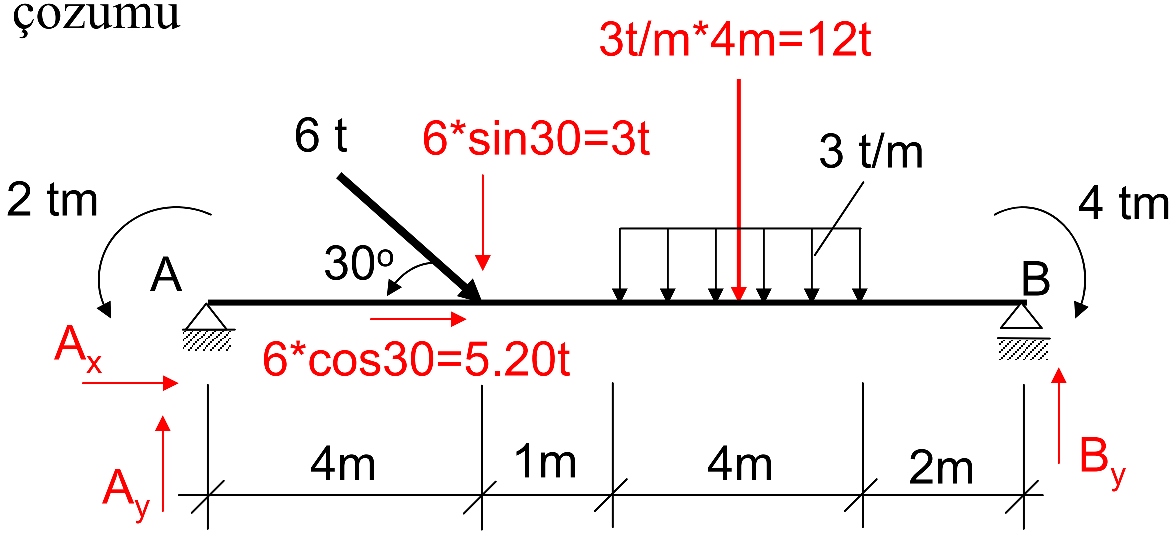
$-4*1-24*(3+2)-6*(2+6*2/3)+8*B_y=0$ $B_y = 20^t$ $(\uparrow)$

$A_y = 14^t$ $(\uparrow)$

Örnek-13. Şekildeki kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



Örnek-13. çözümü



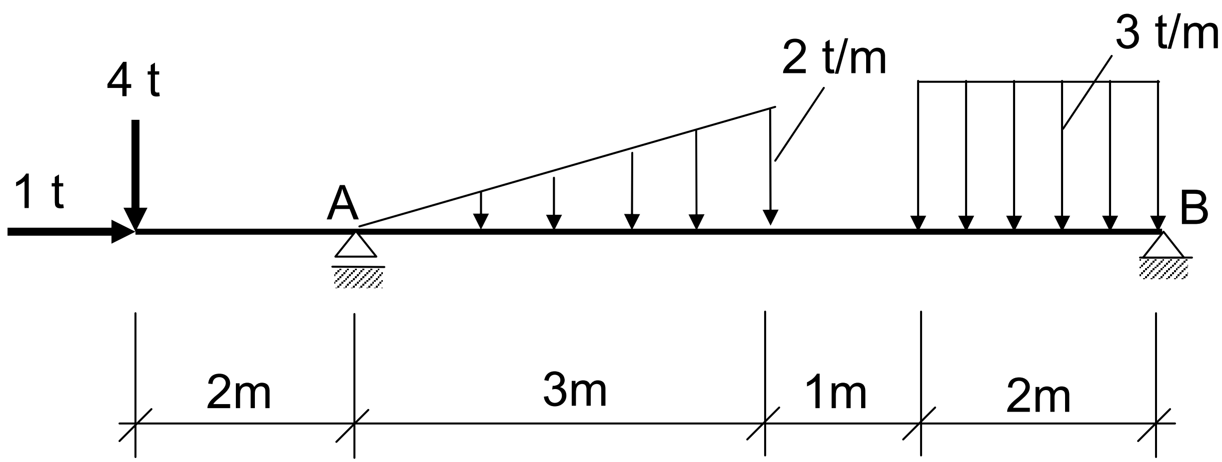
$\sum Fx = 0$ (→ +) $\qquad A_x+5.20=0 \qquad A_x=-5.20t \qquad (\longleftarrow)$

$\sum Fy = 0$ (↑ +) $\qquad A_y+B_y-3-12=0 \qquad A_y + B_y = 15^t$

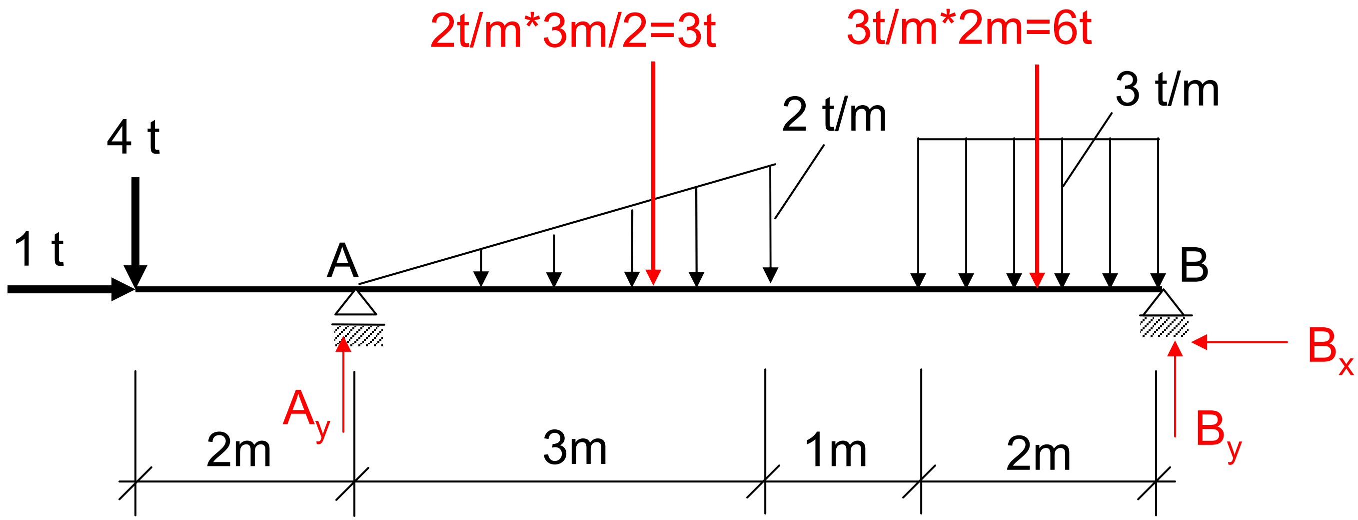
$\sum M_A = 0$ (↺ +) $\qquad 2^{tm}-4^{tm}-3^{t}*4^{m}-12^{t}*(5+2)^{m}+11*B_y=0 \qquad B_y = 8.91^t \; (\uparrow)$

$A_y = 6.09^t \; (\uparrow)$

Örnek-14. Şekildeki kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



Örnek-14. çözümü



$\sum Fx = 0$ (→ +) 1-B_x=0 B_x=1t (←)

$\sum Fy = 0$ (↑ +) A_y+B_y-4-3-6=0 $A_y + B_y = 13^t$

$\sum M_A = 0$ (↺ +) $4^t*2^m-3^t*2^m-6^t*(4+1)^m+6*B_y=0$ $B_y = 4.67^t$ (↑)

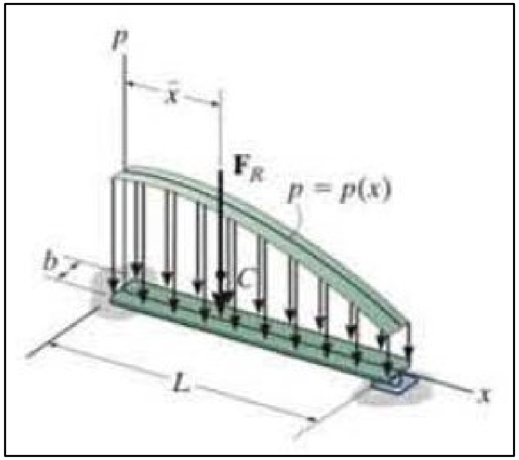
$A_y = 8.33^t$ (↑)

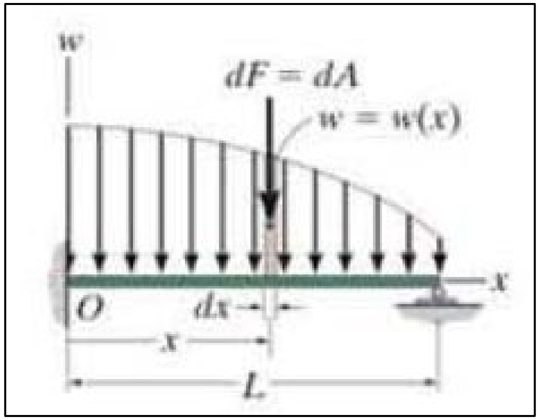
Yayılı Yükler (özel olarak kirişlerde yayılı yükler)

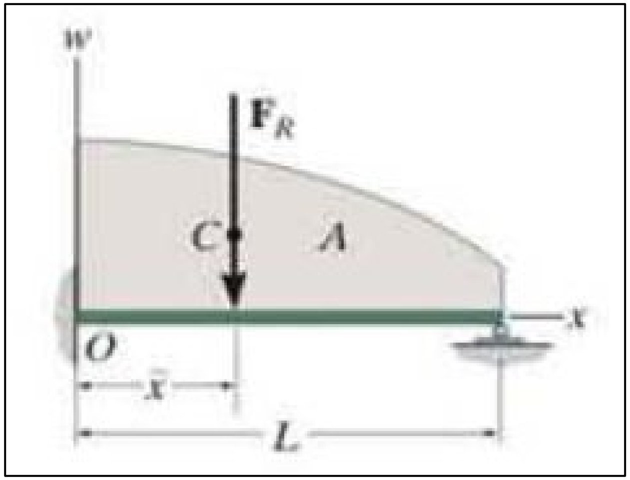
Bileşke Kuvvetin Şiddeti

Şekilde gösterilen plak üzerindeki yükleme, sonsuz sayıda ve her biri plağın ayrı bir diferansiyel alanına etkiyen bir paralel kuvvetler sistemidir. Bu kuvvetler sistemi bir tek F_R bileşke kuvvetine indirgenebilir.

Basınç yükü şiddetinin yönü yük şiddeti diyagramı üzerindeki oklarla belirtilir. Ve birim alan başına kuvvet yerine, **<u>birim uzunluk başına kuvvet</u>** (N/m) olarak gösterilir.







$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

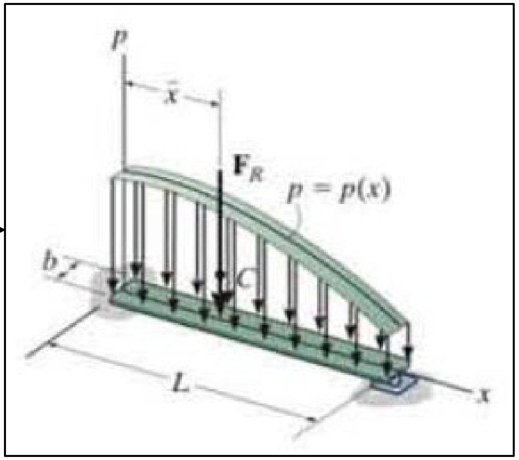
Bileşke Kuvvetin Konumu

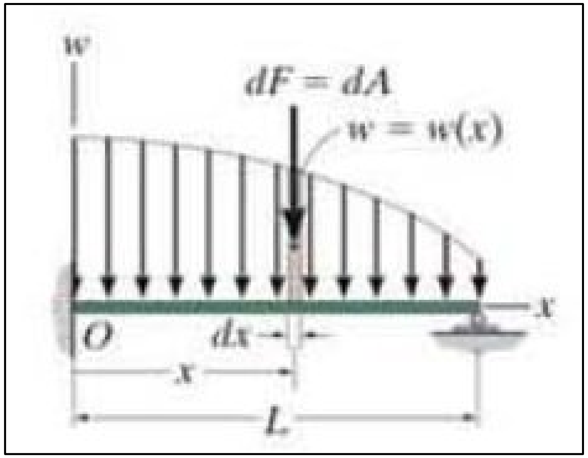
F_R'nin etki çizgisinin x konumu, bileşke kuvvetin ve yayılı kuvvetin O noktasına (y eksenine) göre momentleri eşitlenmek suretiyle belirlenebilir.

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \qquad -\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)\,dx$$

Basınç, y ekseni boyunca düzgün olduğundan sadece x'in fonksiyonudur.

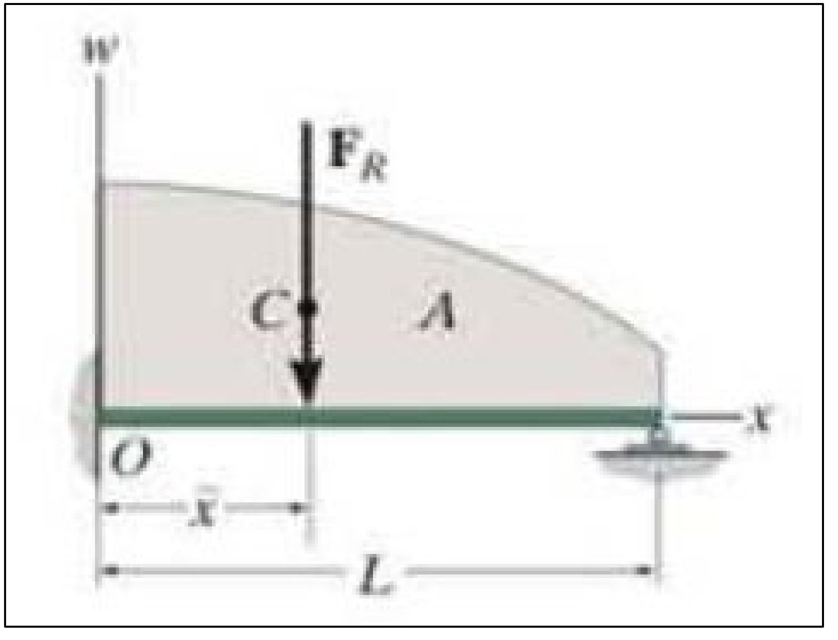
$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$



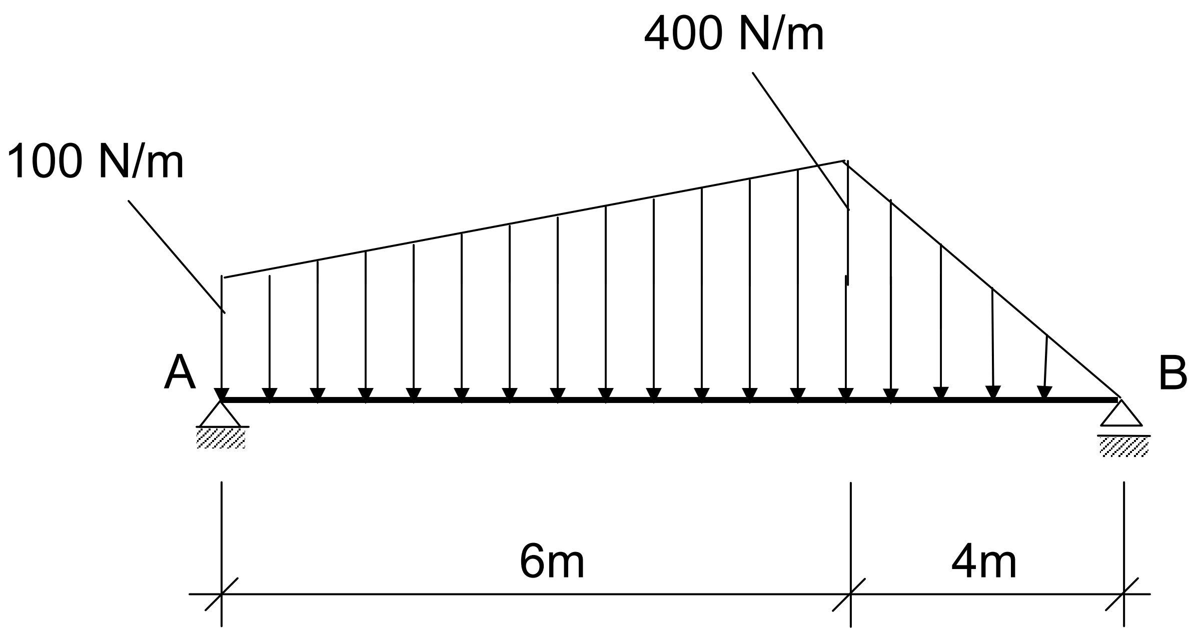


Buradan;

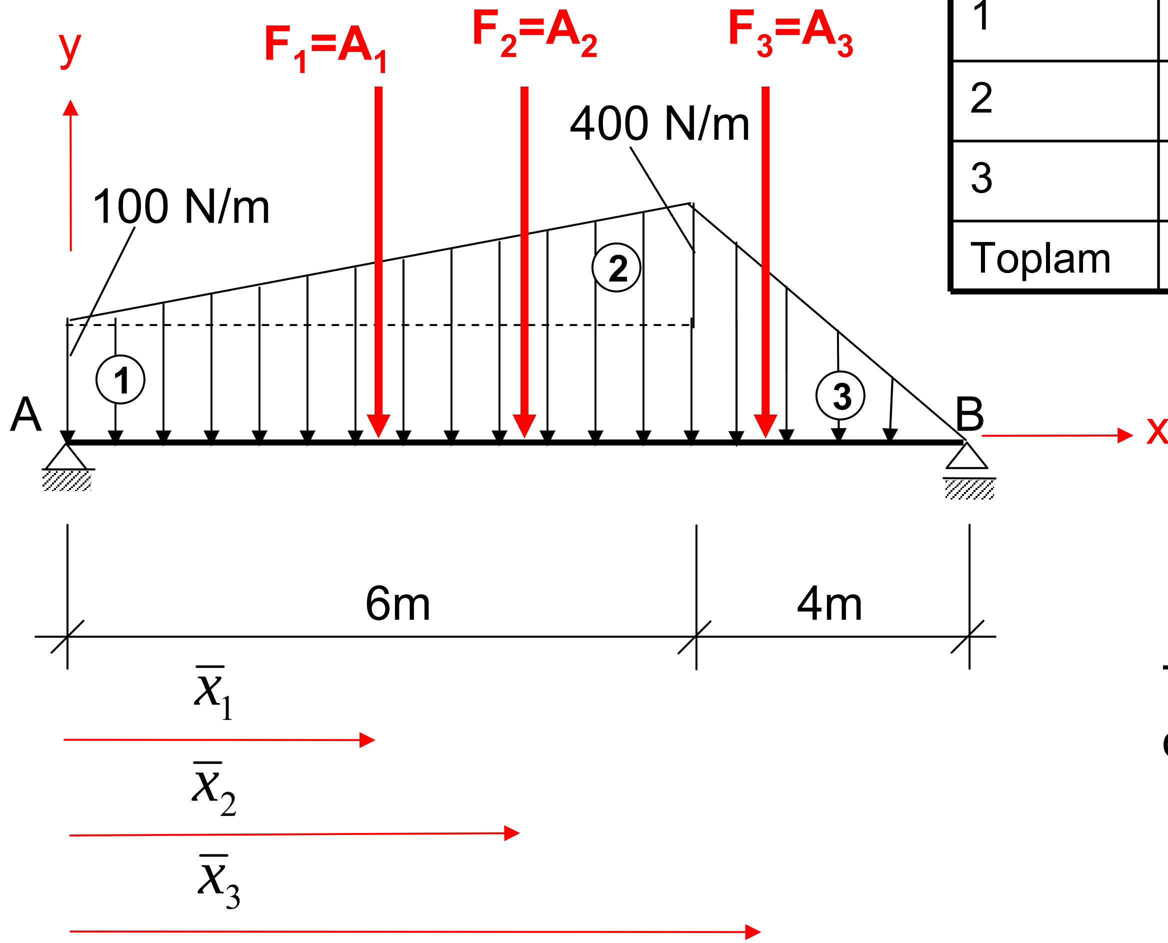
Yayılı yüke eşdeğer olan bileşke kuvvetin etki çizgisi, yayılı yükün oluşturduğu alanın ağırlık merkezinden geçmektedir. Eşdeğer tekil kuvvet F_R, ağırlık merkezine etkitildiğinde yaratacağı etki (örn: mesnet kuvvetleri), yayılı yükün yaratacağı mesnet tepkileri ile aynı olacaktır.



Örnek-15. Şekildeki kirişte verilen yayılı yükleri tek bir kuvvete indirgeyerek mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



Örnek-15. çözümü

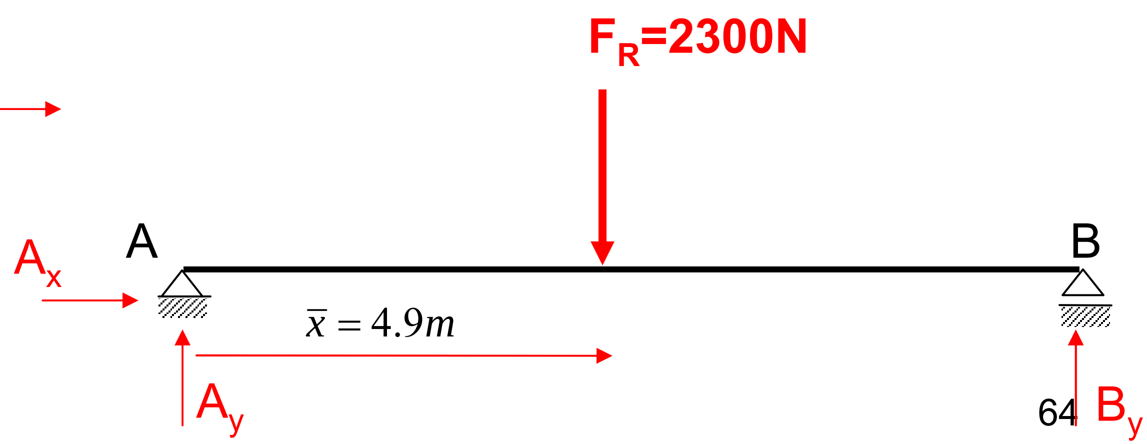


Alan No	Alan (m^2)	$\bar{x}_i\,(m)$	$\bar{x}_i A_i\,(Nm)$
1	100*6	6/2	1800 Nm
2	(1/2)*300*6	(2/3)*6	3600 Nm
3	(1/2)*400*4	6+(1/3)*4	5864 Nm
Toplam	2300 N		11264 Nm

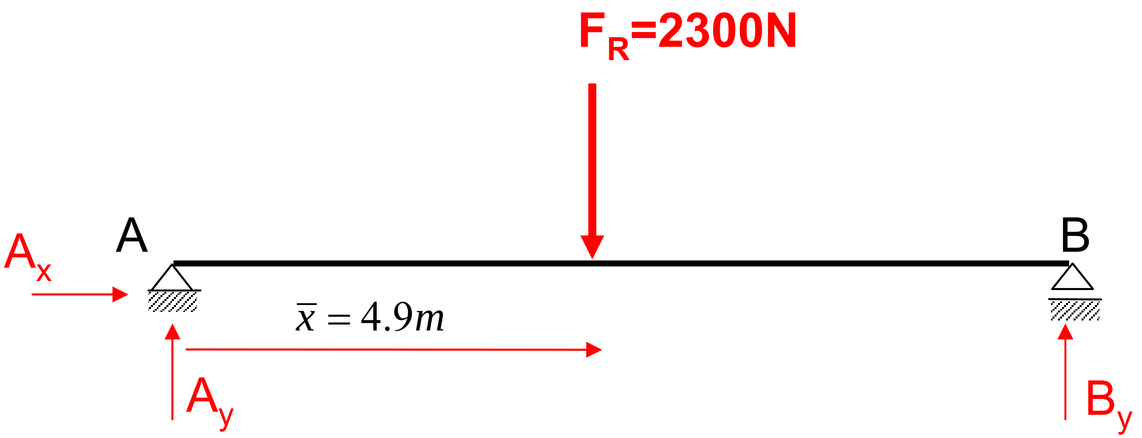
$$\bar{x} = \frac{11264}{2300} = 4.9m$$

F_R= 2300 N

Tablo yapmak şart değil hesapla da aynı sonuç bulunur.



Örnek-15. çözümü



$\sum Fx = 0$ $\xrightarrow{+}$ A_x=0

$\sum M_A = 0$ (+ ↺) -2300*4.9+B_y*10=0 B_y = 1127 N (↑)

$\sum Fy = 0$ (+ ↑) A_y+1127-2300=0 A_y = 1173 N (↑)